Simulationsrechnung eines solaren $\alpha^2\omega$ - Dynamomodells mit anisotropem α-Tensor

Diplomarbeit
vorgelegt von
Martin Andreas Rieth
aus Göttingen

angefertigt
an der Sternwarte
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

1.1. Der Mensch als Teil eines Ganzen 1
1.2. Beobachtung, Messung, Modell, Theorie, Experiment 2

2 Beobachtung und Messung 5

2.1. Die Sonne mit bloßem Auge 5
2.2. Maunder Schmetterlingsdiagramm 6
2.3. Differentielle Rotation 8
2.4. Das Magnetfeld 9

3 Modell und Theorie 11

3.1. Einführung in die Problematik 11
3.2. Grundgleichungen 14
3.3. Dynamogleichung mit mittleren Feldern 15
3.4. Entdimensionierung der Variablen 17
3.5. Die Zerlegung in poloidale und toroidale Anteile 18
3.6. Entwicklung des alpha-Tensors 19
3.7. Die Elemente des allgemeinen alpha-Tensors 22

4 Ergebnisse 25

4.1. Betrachtung früherer Arbeiten 25
4.2. Konsistenztests mit dem neuen Simulationsprogramm 26
4.3. Der Wandel von α^2 (ganze Sphäre) zu $\alpha^2\omega$ (Schale) 26
4.4. Die Vorzeichenkombinationen von $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(4)}$ und ra 43
4.5. Besonderheiten bei anderen Verhältnissen: 47
4.6. Größenverhältnis der anisotropen Anteile zu $\alpha^{(0)}$ 48
4.7. Größenverhältnis der anisotropen Anteile untereinander 50

5 Diskussion und Ausblick 55

A Die numerische Herleitung der α-Terme 57

Literaturverzeichnis 63

Verzeichnis der Internetadressen (URL) 63

Danksagung 64

1 Einleitung

1.1. Der Mensch als Teil eines Ganzen

Der Mensch und sein Weltbild hat sich über die Jahrtausende sicherlich ständig verändert. In allen Kulturen war und ist die Sonne immer wichtiger Bestandteil dieses Weltbildes gewesen. So entspringen die Fragen, die in dieser Arbeit gestellt werden, nicht allein unserer heutigen Kultur, sondern basieren teilweise auf jahrtausendealten Beobachtungen und Fragen. Lediglich die Art der Fragestellung und die Methode der Suche nach den Antworten sind Kinder unserer heutigen Zeit.

Natürlich und selbstverständlich ist der Einfluss, den die Sonne auf den Ackerbau bzw. das Pflanzenwachstum hat. Der Wunsch nach mehr Wissen über die Bedeutung der Sonne für den Menschen und seine Kultur beschränkt sich aber bei weitem nicht nur auf Temperaturschwankungen zwischen Tag und Nacht. Der Mensch möchte ihren Einfluss auf unser Klima, unser Wohlbefinden und eine Vielzahl anderer Eindrücke erfahren, um vielleicht letztendlich seine Rolle im Universum und den Sinn des Lebens ein wenig besser zu verstehen. Dadurch ist die Sonne immer schon wichtiger Bestandteil der Kultur einer Gesellschaft gewesen, wie am Beispiel des ägyptischen Sonnengottes Ra zu erkennen ist. In unserer Gesellschaft wird die Sonne zwar nicht mehr als Gottheit verehrt, jedoch zeigte das ausgeprägte Interesse an der totalen Sonnenfinsternis am 11.August 1999 wie stark sie unser Leben auch heute noch beeinflusst.

Die Sonne ist sicherlich der erste Stern, der von den Menschen aufmerksamer beobachtet wurde und über den Daten gesammelt wurden. Speziell in der Astronomie war und ist er nicht wegzudenken. Die Astronomie in Verbindung mit der Physik, der Astrophysik, brachte das Wissen über „Den Stern, von dem wir leben“ (Kippenhahn 1990), einen großen Schritt voran. Erst in relativ junger Vergangenheit wurde das Magnetfeld der Sonne entdeckt. G.E. Hale (1908) entdeckte die Aufspaltung der Fraunhoferlinien durch den Zeeman-Effekt und wies empirisch Magnetfelder von 4kGauss nach. Die Auswirkungen des solaren Magnetfeldzyklus wurden jedoch in ihrer Ausprägung als Sonnenflecken schon als „Raben in der Sonne“ um 1000 BC in chinesischen Annalen erwähnt und die Erwähnung des pockengesichtigen Sonnengottes in Aztekischen Mythologien legen die Vermutung der frühen Entdeckung auch durch Azteken nahe (URL 1). Die Tragweite dieser Entdeckung sowie die Bedeutung für den Planeten Erde und alles Leben auf ihm können bisher noch nicht vollständig erfasst werden.

Wie es jedoch das Wesen des Menschen ist nach Wissen zu streben und dem Unerforschten mit Ideen, Formeln und Lehrmeinungen zu Leibe zu rücken, hat sich die Dynamotheorie bisher als die anerkannteste Theorie zur Beschreibung des solaren Magnetfeld-Zyklus erwiesen.

Die Dynamotheorie ist ein wichtiger Schritt auf unserem noch sehr langen und vielleicht endlosen Weg, die Sonne vollständig zu begreifen und damit ein weiterer Versuch des Menschen über sich und seinen Horizont hinauszublicken.

1.2. Beobachtung, Messung, Modell, Theorie, Experiment

In der Forschung ist durchgängig zu beobachten, dass meistens aller Erforschung der Natur voran die Beobachtung steht. Mit der Beobachtung kommt dann schnell die Aufzeichnung derselben, die Messung, hinzu. Bei genügender Beobachtung, also ausreichend Daten, kann begonnen werden, die Beobachtung vorherzusagen, sich also ein Modell bzw. eine Theorie für die Vorgänge zurecht zu legen. Die Theorie und das Modell entwickeln sich wohl gleichzeitig, so dass ein Modell der Vorgänge immer auch auf einer Theorie basiert, die sich im Laufe der Beobachtung immer mehr verfeinert und das Modell in Frage stellt.
Wenn dies ausreichend getan ist, sollte ein Experiment bzw. die Simulation eines solchen, als höchster Richter über die Güte und Qualität der Theorie sowie des Modells, durchgeführt werden.

Da dies die, meiner Meinung nach, sinnvollste Art ist an ein komplexes Thema wie die solare Magnetfeldtheorie heranzugehen ist auch die vorliegende Arbeit in dieser Struktur gehalten.

1.2.1. Beobachtung

Der erste Schritt: Was wurde und wird beobachtet?
Wenn zum Beispiel in China bereits um 1000 BC die schwarzen Flecken als Raben über der Sonne gedeutet werden, wird deutlich wie wichtig der kulturelle Einfluss auf die Beobachtung ist. Die Sonne galt in der Geschichte als rein und perfekt Flecken (Makel) durften sich deswegen zunächst nicht auf der Sonnenoberfläche befinden. Hier wird deutlich wie bestehende Paradigmen spätere Untersuchungen erschweren können.
Bereits 28 B.C. (URL 1) registrierten chinesische Astronomen in systematischen Beobachtungen kleine, wechselhaft dunkle Flecken auf der Sonnenoberfläche.

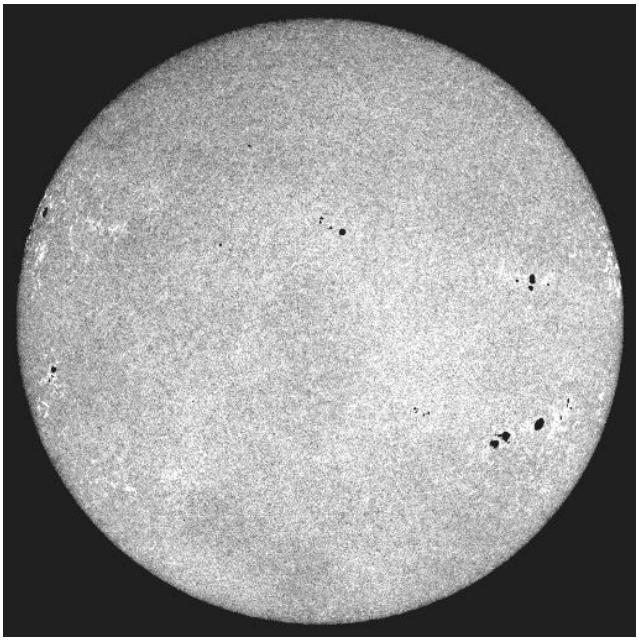


Abb.: 1.2.1. Pseudokontinuumaufnahme der Sonnenoberfläche vom 5.Nov. 1999 Aufgenommen vom *Michelson Doppler Imager*-Experiment an Bord der SOHO-Sonde (URL 2).

1.2.2. Messung und Dokumentation

Der zweite Schritt, die Messung und ordentliche Dokumentation, ist sicherlich der wichtigste des ganzen Forschungsweges, da auf diesen so gewonnen Daten alles Weitere beruht. Ohne die gründliche Erfassung aller Messdaten können die Ergebnisse eines Experimentes, die Aussage einer Theorie von keinem anderen sinnvoll überprüft oder hinterfragt werden und bleiben so in einem Bereich der wissenschaftlichen Grauzone haften. Ohne die Dokumentation müssten nachfolgende Generationen alles von vorne entdecken, beobachten und neu erfinden.

1.2.3. Modell

Schon während der Messung und deren Dokumentation zwingt sich wahrscheinlich ein Modell auf, das die Vorgänge irgendwie beschreibt und wahrscheinlich die Art der Messung immer mehr beeinflusst. Zu Beginn ist ein Modell wohl eher falsch und die Widersprüche und Fehler tauchen noch sehr schnell auf, aber mit der Zeit wird sich ein Modell herauskristallisieren, mit immer weniger Widersprüchen zur Beobachtung und Messung. Im Idealfall wird dieser Vorgang irgendwann zu einem Ende führen, in dem das Modell die Realität völlig korrekt beschreibt.

1.2.4. Theorie

Die neuen Beobachtungen und das neue Modell in Einklang mit früheren Beobachtungen und Modellen, aber auch herrschenden Lehrmeinungen zu bringen, kann dadurch am einfachsten erreicht werden, dass auf diesen aufgebaut wird. Dabei darf allerdings nicht außer Acht gelassen werden, dass ein neu beobachtetes Phänomen eventuell auch auf neuen Theorien basieren muss, die den bisherigen widersprechen und die ihrerseits eben wiederum nur Theorien und keine Fakten sind.
In der Sonnenphysik geschieht dies auf Basis der Elektrodynamik in magneto-hydrodynamischer Näherung, also der Plasmaphysik. Die verbreitetste Theorie zur Entstehung des solaren Magnetfeldes ist die Dynamotheorie.

1.2.5. Experiment

Natürlich wäre es am schönsten ein reales praktisches Experiment durchführen zu können, aber bisher sind wir bei der Sonnenphysik in diesem 5. Schritt auf theoretische Experimente, wie beispielsweise einer Simulation, angewiesen. Auf dem Gebiet der Simulationen ist durch den Computer in neuester Zeit sehr viel möglich geworden, dennoch ist meistens die Rechenleistung die eigentliche Grenze des Experiments. So ist die theoretische Sonnenphysik in den letzten Jahren wohl vor allem deswegen weiter fortgeschritten, weil die Simulationsrechnungen immer mehr Effekte mit in den Gleichungen berücksichtigen konnten.

In dieser Arbeit soll versucht werden, die Dynamotheorie und im einzelnen die später näher zu erklärende Theorie des Alpha-Effektes voranzubringen, indem die früheren Arbeiten und Ergebnisse von Prautzsch und Weißhaar in einer neuen Simulationsrechnung zusammengefasst und auf neue Erkenntnisse hin untersucht werden.

2 Beobachtung und Messung

2.1. Die Sonne mit bloßem Auge

Auf den ersten Blick ist die Sonne ein einziger heller Feuerball, aber schon früh wurden auf ihr relativ dunkle (also kältere) Flecken entdeckt. Diese Flecken sind teilweise so groß, dass sie mit bloßem Auge zu sehen sind.

Abb. 2.1.1. Sonnenfleckenzeichnungen von Christoph Scheiner aus dem Buch „Rosa Ursina“ (Mitchell 1916) zeigen deutlich die Wanderung der beobachteten Flecken.

Die Entwicklung des Fernrohres durch die Holländer im Jahre 1608 führte im Jahre 1611 auch in Europa zur Entdeckung der Sonnenflecken. Sie wurden nahezu gleichzeitig durch Johannes Fabricius, Galileo Galilei, Thomas Harriot und Christoph Scheiner entdeckt. Galileo klassifizierte die Sonnenflecken aufgrund der Randverzerrung als eine Erscheinung auf der Sonnenoberfläche (URL 1).
Auch wenn die Sonnenflecken selbst keinen großen Einfluss auf die globale solare Strahlung haben, kann die begleitende magnetische Aktivität starken Einfluss auf die ultravioletten und weichen Röntgenspektren nehmen. Diese Änderungen während des solaren Zyklus haben wichtige Auswirkungen auf die äußere Atmosphäre der Erde.

Die folgenden Abbildungen zeigen Sonnenflecken auf der Sonnenoberfläche in zeitlicher Abfolge. Sichtbare Sonnenflecken in unterschiedlichen Breiten fotografiert machen die differentielle Rotation der Sonne für das bloße Auge erkennbar.

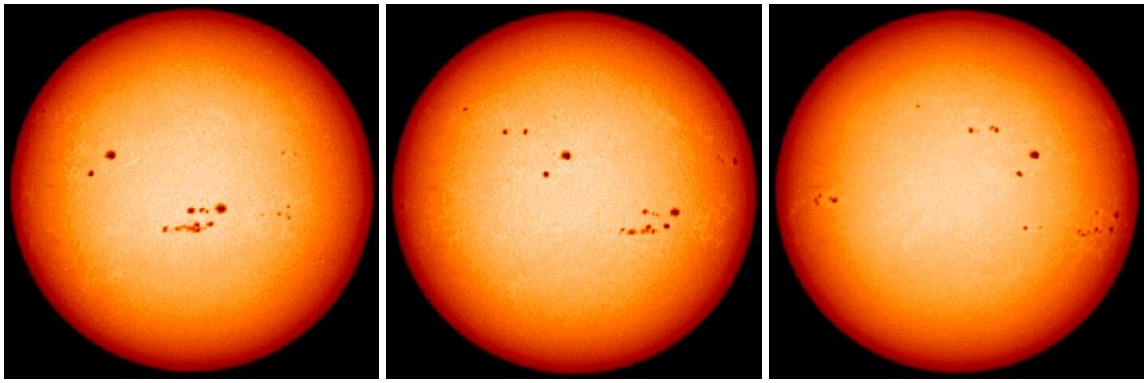


Abb. 2.1.2. Weißlichtaufnahmen vom 6./8./10. Jan. 1992 (URL 1).
Fotos der Sonne zeigen implizit sichtbare differentieller Rotation, wenn die Flecken auf unterschiedlichen Breiten zu sehen sind.

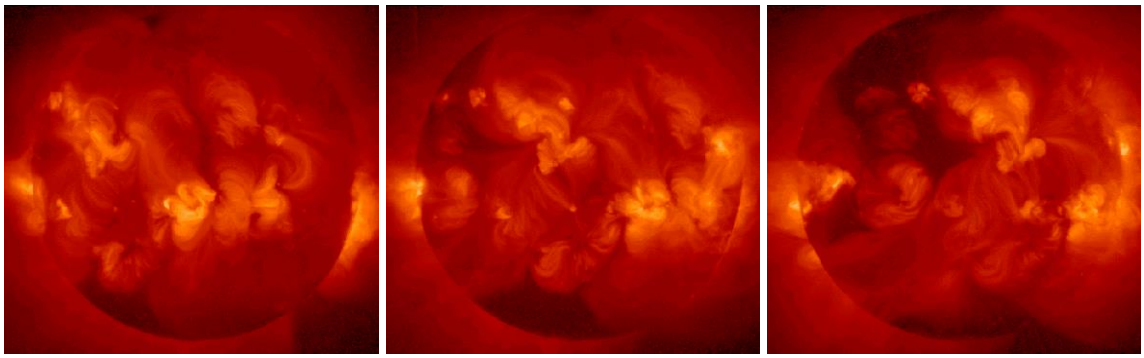


Abb. 2.1.3. Aufnahmen in weichem Röntgenlicht vom 6./8./10. Jan. 1992. (URL 1)
Die Veränderung der Bilder zeigt die Korrelation der Röntgenemission zur Rotation der Sonnenflecken, was die Vermutung des Zusammenhangs zwischen Magnetfeldern und Stärke der weichen Röntgenstrahlung nahelegt.

2.2. Maunder Schmetterlingsdiagramm

Erstaunlich ist das zyklische Auftreten der Sonnenflecken. So stellte Samuel H. Schwabe (1844) fest, dass die Zahl der Flecken periodisch schwankt und schätzte die Dauer des Zyklus auf 10 Jahre. Auf Grund dieser Erkenntnis wertete der Züricher Astronom Rudolf Wolf (1861) alte Beobachtungsberichte aus und kam zu dem Schluss, dass die mittlere Periode der Fleckenhäufigkeit etwa 11 Jahre beträgt. Die einzelnen Flecken existieren dagegen nur einige Tage, in Ausnahmefällen auch bis zu 100 Tagen.
Richard C. Carrington (1863) entdeckte weitere Besonderheiten dieser Sonnenflecken, die von Gustav Spörer (1887) genauer untersucht und klassifiziert wurden.

Dieses Wissen ist heute als Spörersches Gesetz bekannt und lautet wie folgt:

- Zu Beginn eines neuen Zyklus entstehen die Flecken in relativ hohen Breitengraden der Nord- und Südhalbkugel (± 40°).
- Der mittlere Entstehungsort wandert in Richtung Äquator.
- Bei ± 15° hat die Fleckentätigkeit ihr Maximum.
- Bei ± 5° endet der Zyklus.

Spätere Untersuchungen zeigten, dass über 90% der Flecken paarweise auftreten, wobei deren Verbindungslinie mit dem Äquator einen Winkel bilden, der bis zu 20° in den oberen Breiten betragen kann (z.B. Nicolson 1982).
Was das Spörersche Gesetz genau bedeutet, wird in der nach Maunder (1894) benannten Darstellung des Maunderschen Schmetterlingsdiagramm sehr einfach klar.
In der Darstellung nach Maunder werden die Flecken in ihrer Position und Zeit, unter Berücksichtigung der Größe, aufgezeichnet. Die Form der Darstellung erinnert an die Flügel eines Schmetterlings, weswegen diese Darstellung auch Maundersches Schmetterlingsdiagramm genannt wird.

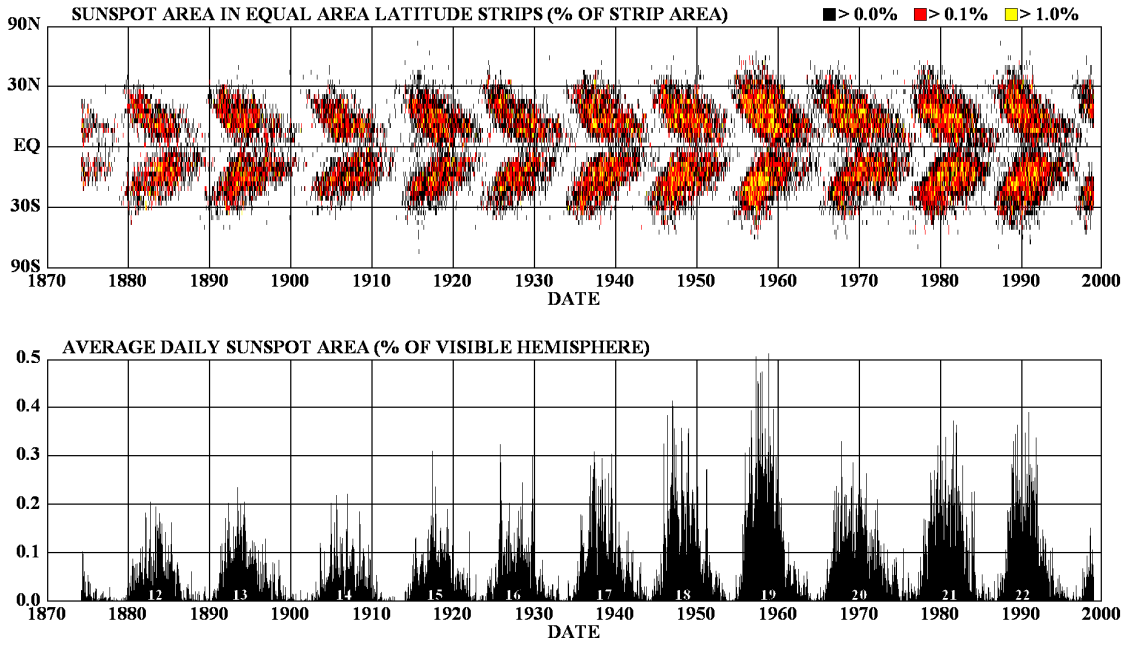


Abb.: 2.2.1. NASA/Marschall Space Flight Center (URL 3).
Oben: Die Variation der Fleckenzahl und ihrer heliographischen Breite ist für zwölf Zyklen zwischen 1874 und 1999 dargestellt. Jeder Fleck ist in seiner Breite an den Tagen seiner Sichtbarkeit eingezeichnet. Die Verteilung im Diagramm erinnert an die Flügel eines Schmetterlings.
Unten: Hier ist die Fleckenfläche in Prozent der sichtbaren Hemisphäre aufgetragen. Der zeitliche Verlauf der Fleckenfläche ist der gleiche wie bei den Fleckenzahlen nach Nicolson (1982).

2.3. Differentielle Rotation

Carrington (1863) entdeckte, dass die Umrundungszeit der Sonnenflecken in Abhängigkeit von der heliografischen Breite erheblich variiert.
Die Rotationsdauer beträgt am Äquator circa 25 Tage und bei ± 15° 27.4 Tage. Die Abhängigkeit der Rotationsdauer von der heliografischen Breite bzw. von der Tiefe der Strömung wird als differentielle Rotation bezeichnet.
Dank der heutigen modernen Beobachtungsmethoden können die Strömungsprofile auf der Sonne auf unterschiedlichste Weise gemessen werden. Informationen über Strömungsprofile im Inneren der Sonne kann jedoch bisher nur die Helioseismologie liefern.

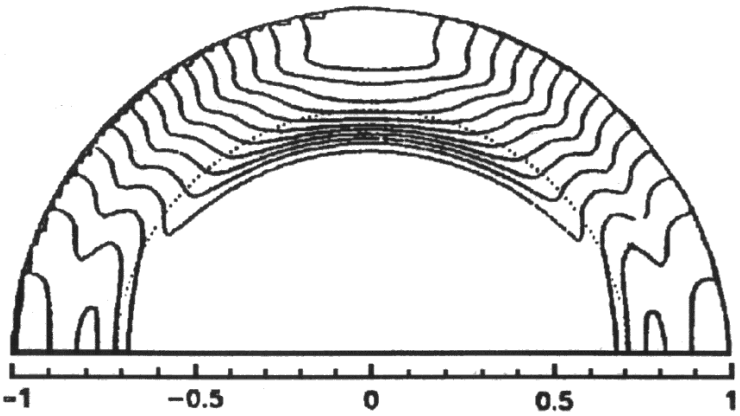


Abb. 2.3.1. Das Bild zeigt Isorotationslinien in der nördlichen Hemisphäre und stellt helioseismologische Ergebnisse nach Libbrecht (1988) dar. Angegeben ist der Sonnenradius.

In der Simulation der vorliegenden Arbeit wurde die so gemessene radiale, differentielle Rotation bereits durch Prautzsch (1999) angenähert umgesetzt und in das Simulationsprogramm integriert.

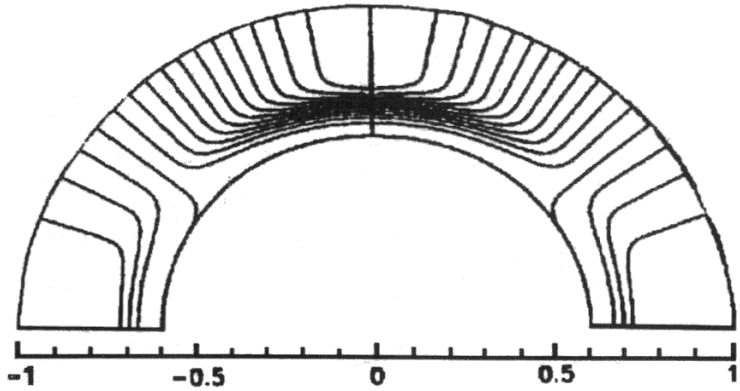


Abb. 2.3.2. Das Bild zeigt Isorotationslinien in der nördlichen Hemisphäre wie sie durch Prautzsch (1999) im Simulationsprogramm umgesetzt wurden.

2.4. Das Magnetfeld

Die Beobachtungen der Sonne ergaben unter Kenntnis des Zeeman-Effektes die Existenz von Magnetfeldern auf der Sonne. Hale (1908) fand in diesen Fleckenpaaren starke Magnetfelder entgegengesetzter Polarität um 3000 Gauß bei mittelgroßen Flecken, während das mittlere Sonnenmagnetfeld nur eine Stärke zwischen 1 bis 10 Gauß aufwies (mittleres Erdmagnetfeld ~ 0.5 Gauß). Weiter werden auf der Nord- und Südhalbkugel in den meist gemeinsam auftretenden Fleckenpaaren entgegengesetzte Polaritäten gemessen. Auch der beobachtete Zyklus wurde durch die Messung des Magnetfeldes wiedergegeben. Das allgemeine Magnetfeld der Sonne und mit ihr die gesamten Polaritäten kehren sich in dem gemessenen Zeitraum von ca. 11 Jahren um. Durch diese Erkenntnis erhält der magnetische Zyklus eine neue Zeitdauer von ca. 22 Jahren.
Babcock (1953) zeigte, dass die Umpolung des allgemeinen Magnetfeldes in der Nähe der Pole mit der Zeit der maximalen Fleckentätigkeit zusammenfällt. Er zeigte bereits 1953, dass der Zyklus von 22 Jahren eine Eigenschaft des allgemeinen solaren Magnetfeldes ist.

3 Modell und Theorie

3.1. Einführung in die Problematik

Zunächst kann durch die Vorstellung der eingefrorenen Feldlinien (Alfvéns Theorem) für sehr gut leitende Materie, wie auf der Sonne als Plasma vorhanden, die Erzeugung eines toroidalen Magnetfeldes aus poloidalem Magnetfeld befriedigend beschrieben werden. Der Einfluss der differentiellen Rotation auf das solare Magnetfeld wurde 1961 von Babcock (1961) eingehend untersucht (Stix 1991, Kippenhahn & Möllenhoff 1975). Leider genügt diese Theorie nur zur Erzeugung von toroidalem Magnetfeld aus poloidalem Magnetfeld.

Diese Tatsache findet sich im Toroidal-Theorem von Elsasser (1947) wieder:
(a) „In einer Kugel kann nur durch differentielle Rotation keine Dynamowirkung erzielt werden.“

Außerdem stellte Cowling (1934) den nach ihm benannten Satz auf, der von Lortz (1968) in seine heutige Form gebracht wurde:
(b) „Ein axialsymmetrisches Magnetfeld, dessen Ströme im Endlichen liegen, kann durch kein Geschwindigkeitsfeld, dessen Betrag beschränkt ist, stationär aufrecht erhalten werden.“

Die genannten Einschränkungen (a) kein rein toroidales Geschwindigkeitsfeld und (b) kein axialsymmetrisches Magnetfeld sind aber gerade die zunächst beobachteten Größen für mittlere (räumlich) Felder auf der Sonne.

Weitere Fragen wirft die relativ kurze Lebensdauer der Magnetfelder in den Flecken auf. Die Zeit, in der die Magnetfelder verschwinden, ist wesentlich geringer, als sie infolge molekularer Diffusivität sein dürften (z.B. Schüßler 1983). Es muss also einen magnetfeldzerstörenden Prozess geben.

Neuen Auftrieb bekam die Dynamotheorie durch die Entdeckung der Wasserstoffkonvektionszone (WKZ). Die WKZ liegt dicht unterhalb der äußersten Schicht, der Photosphäre. Die Dicke wird mit ungefähr 30% des Sonnenradius ($R_\odot \approx 700.000$ km) angegeben. In dieser Zone ist ein stark turbulentes Geschwindigkeitsfeld vorhanden, welches die im Inneren der Sonne durch Kernfusion entstandene Energie nach außen transportiert und die beobachtete schnelle Dissipation der Magnetfelder erklären kann.
Die starke Turbulenz in kleinskaligen Materiebewegungen führt zu nichtaxialsymmetrischen Anteilen des Geschwindigkeitsprofils in allen Komponenten. Aufgrund des Prinzips der eingefrorenen Feldlinien hat dort dann auch das Magnetfeld nicht axialsymmetrische Anteile.

Lediglich im Mittel (großskalig) sind die turbulenten Strömungen axialsymmetrisch. Für die sich daraus ergebenden statistischen Funktionen können aber Gleichungen aufgestellt werden, die nicht gegen den Satz von Cowling oder das Toroidal-Theorem von Elsasser verstoßen.

Die folgenden Bilder zeigen den Aufbau bzw. die Erzeugung einer toroidalen Magnetfeldkomponente aus einer poloidalen Magnetfeldkomponente durch differentielle Rotation.

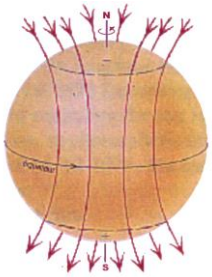


Abb.: 3.1.1. Zunächst existiert in dieser schematischen Darstellung nur die poloidale Komponente.

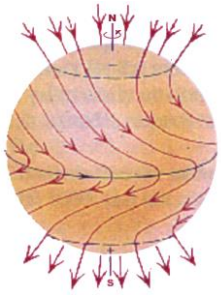


Abb.: 3.1.2. Die differentielle Rotation beginnt durch Induktionseffekte die poloidalen Feldlinien zu verzerren und erzeugt eine toroidale Komponente.

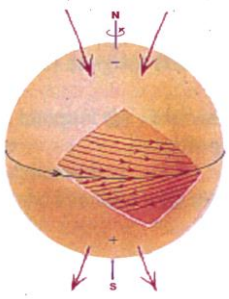


Abb.: 3.1.3. Allein aus differentieller, breitenabhängiger Rotation würden also nur toroidale Magnetfeldkomponenten erzeugt werden.

An dieser Stelle wird die Frage nach einem Effekt zwingend, der auch poloidale Magnetfeldkomponenten erzeugen kann.

Die Idee zu einem Effekt, der dieses Problem löst, hatte Parker (1955) bereits 1955. Dieser Effekt wird heute allgemein “alpha - Effekt“ bezeichnet.
Wie Turbulenz aus toroidalen Magnetfeldern poloidale Feldanteile erzeugen kann, zeigte er auf anschauliche Weise mit der nach ihm benannten Parker-Schleife.

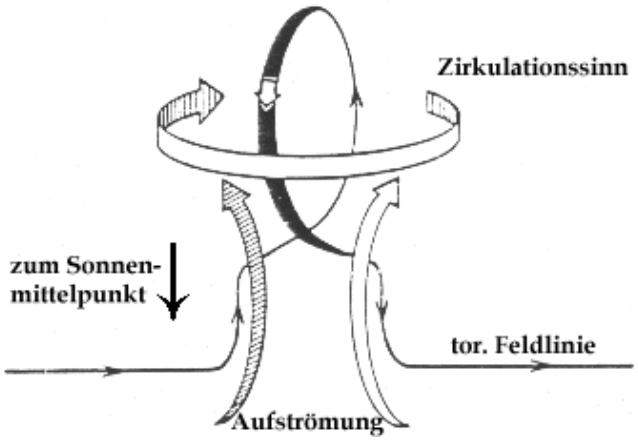


Abb.: 3.1.4. Parkerschleife

Das Modell beschreibt diesen Prozess wie folgt:
Heiße Materieblasen steigen innerhalb der WKZ auf und dehnen sich dabei aus, während abgekühlte wieder hinabsinken und sich dabei zusammenziehen. Durch diese Größenänderungen erhalten die Blasen Geschwindigkeitskomponenten zusätzlich zur radialen Geschwindigkeit. Dadurch werden die Blasen in beiden Fällen durch den Einfluss der Corioliskraft ein wenig verdreht, und zwar in beiden Fällen mit dem gleichen Drehsinn, aber auf der Nord- und Südhalbkugel genau umgekehrt. Die Blasen nehmen nun die Magnetfeldlinien, wegen des Prinzips der eingefrorenen Feldlinien, mit und verdrehen diese. So erhält ein Feld mit rein toroidalen Anteilen auch poloidale Anteile und umgekehrt.
Die Parkerschleife bietet ein mögliches Modell zur Erzeugung von poloidalem Magnetfeld aus toroidalem und soll in der hier vorliegenden Arbeit zur Vorstellung genügen (Parker 1970).

Die nächsten Kapitel sollen nun zeigen, wie das mathematische und physikalische Gerüst der vorliegenden Arbeit zur Berechnung des Dynamomodells mit Hilfe gemittelter Größen entwickelt wurde.

3.2. Grundgleichungen

Auf der Sonne können wir die folgenden Zustände als gegeben ansehen, ohne die Ergebnisse damit nennenswert zu verfälschen:

Zustand I:	**Die Sonne ist eine Kugel.**
Zustand II:	**Das Sonnenplasma besitzt eine hohe Leitfähigkeit.**
Zustand III:	**Die Materiegeschwindigkeiten sind nichtrelativistisch.**

Die Betrachtung der Sonne als Kugel (Zustand I) und damit der Berechnung in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) ist wegen der daraus resultierenden vereinfachten mathematischen Darstellung sinnvoll. Hierbei soll am Nordpol $\theta = 0$, am Äquator $\theta = \pi/2$ und am Südpol $\theta = \pi$ gelten.

Als theoretische Grundlage liegt es nahe aufgrund des vorhandenen sehr hoch leitfähigen Sonnenplasmas das beobachtete Magnetfeld mit Effekten der Selbstinduktion zu erklären. Die Dynamotheorie wurzelt zum wichtigsten Teil in der Theorie der Elektrodynamik und so sind hier die Maxwell-Gleichungen im Gaußschen Maßsystem der Anfang aller Theorie.

Die vier Maxwell-Gleichungen im Vakuum angegeben im Gaußschen Maßsystem lauten:

(3.2.1.) $$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}$$

(3.2.2.) $$\mathbf{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}$$

(3.2.3.) $$\mathbf{div}\ \mathbf{B} = 0$$

(3.2.4.) $$\mathbf{div}\ \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

Sie werden durch das Ohmsche Gesetz für nichtrelativistische Geschwindigkeiten ergänzt:

(3.2.5.) $$\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$\mathbf{E}$ bezeichnet das elektrische Feld, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathbf{B}$ die magnetische Kraftflussdichte, $\mathbf{j}$ die Stromdichte, ρ die Ladungsdichte, σ die Leitfähigkeit und $\mathbf{v}$ die Materiegeschwindigkeit.

Wenn wir die Zustände II und III in die Maxwell-Gleichungen einfließen lassen, ergeben sich die Maxwell-Gleichungen in der sogenannten magnetohydrodynamischen Näherung:
Wegen Zustand II wird (3.2.4.) unwichtig.
Wegen Zustand III werden keine nennenswerten Verschiebeströme $\frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}$ auftreten, damit wird (3.2.2.) zu:

(3.2.6.) $$\mathbf{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$$

Einsetzen von (3.2.6.) in (3.2.5.) und Bilden der Rotation liefert:

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{rot}\ \mathbf{B}\right)-\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{rot}\ \mathbf{E}$$

Unter Nutzung von (3.2.1.) ergibt sich:

$$\mathbf{rot}\left(\frac{c}{4\pi\sigma}\mathbf{rot}\ \mathbf{B}\right)-\mathbf{rot}\left(\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}$$

Mit der Einführung der magnetischen Diffusivität

(3.2.7.) $$\eta=\frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

ergibt sich die sogenannte Induktionsgleichung in magnetohydrodynamischer Näherung:

(3.2.8.) $$\dot{\mathbf{B}}=\mathbf{rot}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)-\mathbf{rot}\left(\eta\,\mathbf{rot}\ \mathbf{B}\right)$$

3.3. Dynamogleichung mit mittleren Feldern

In diesem Kapitel sollen die Gleichungen für statistische Geschwindigkeitsfelder in die Induktionsgleichung eingebracht werden.

Die Induktionsgleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung von $\mathbf{B}$, die bestimmt wird durch die Diffusion $\mathbf{rot}\left(\eta\,\mathbf{rot}\ \mathbf{B}\right)$ und Induktion aufgrund eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{rot}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$. Je größer die Leitfähigkeit σ desto geringer die magnetische Diffusivität η. Im Falle $\sigma\to\infty$ oder $\eta\to 0$ findet keine Diffusion mehr statt und es ergibt sich das Bild der eingefrorenen Feldlinien (Priest 1982). Wenn der Einfluss des elektrischen Feldes auf das Magnetfeld $\mathbf{B}$ vernachlässigt werden kann (Zustand II und Zustand III), so ändert sich $\mathbf{B}$ bei der Transformation auf ein anderes bewegtes Inertialsystem nicht (Kippenhahn & Möllenhoff 1975). Wird eine bewegte Fläche als Bezugssystem genommen, so ist dort $\mathbf{v} = 0$ und somit die magnetische Flussdichteänderung $\dot{\mathbf{B}} = 0$. Daher ist die Flussänderung bei konstanter Fläche auch Null.

Die Lösung des „Verbots“ eines axialsymmetrischen Magnetfeldes auf der Sonne durch Cowling gelang durch die Betrachtung der Geschwindigkeitsfelder als gemittelte (statistische) Felder.
Die Maxwell-Gleichungen bleiben wegen ihrer Linearität und da Mittelung und Differentiation näherungsweise vertauschbar sind (Krause & Rädler 1980) unverändert gültig.
Betrachtet man $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ als statistische Zufallsfunktionen, deren physikalische Aussage in entsprechenden Mittelwerten steckt, so lassen sie sich in großräumige mittlere Größen $\overline{\mathbf{B}}$ und $\overline{\mathbf{v}}$, die gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen können, und ihre statistische Fluktuationen $\hat{\mathbf{B}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$, deren Mittelwerte verschwinden, zerlegen.

Die Beobachtungen legen es nahe, Magnetfelder und Geschwindigkeiten in großräumige, langlebige (magnetischer Zyklus, Rotationsgesetz) und kleinskalige, kurzlebige Anteile (Flussröhren, Turbulenz) aufzuspalten:

(3.3.1.) $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} \quad , \quad \mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}$

Wird über den Azimut (ϕ) gemittelt, wie es bei Axialsymmetrie möglich ist, so gelten die Reynoldschen Relationen (z.B. Krause & Rädler 1980, S 16)

(3.3.2.) $\overline{\overline{\mathbf{B}}} = \overline{\mathbf{B}} \quad , \quad \overline{\hat{\mathbf{B}}} = 0 \quad , \quad \overline{\mathbf{B}+\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{v}} \quad , \quad \overline{\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{v}}} = \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{v}} \quad , \quad \overline{\overline{\mathbf{B}}\,\hat{\mathbf{v}}} = 0$

Durch Einsetzen von (3.3.1.) in (3.2.8.) und anschließender Mittelung und Anwendung von (3.3.2.) lassen sich folgende zwei Gleichungen gewinnen:

(3.3.3.) $$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\overline{\mathbf{v}}\times\overline{\mathbf{B}} + \overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}} - \eta\ \mathrm{rot}\ \overline{\mathbf{B}}\right)$$

(3.3.4.) $$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\ \left(\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}} + \overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}} + \overline{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{v}}\times\overline{\mathbf{B}} - \eta\ \mathrm{rot}\,\hat{\mathbf{B}}\right)$$

Die Induktionsgleichung für mittlere Felder (3.3.3.) enthält gegenüber (3.2.8.) den zusätzlichen Term $\mathbf{rot}\,(\overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}})$. Über (3.3.4.) sind $\hat{\mathbf{B}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ (Zustand II) miteinander korreliert, so dass dieser Term im allgemeinen nicht verschwindet.
Ist die räumliche Verteilung von $\mathbf{v}$ bekannt, so ist $\mathbf{rot}\,(\overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}})$ mit Hilfe der Gleichung (3.3.4.) eindeutig bestimmt. Ein allgemeiner Ausdruck ist hierfür jedoch nicht herleitbar, so dass einige Näherungen nötig sind.
Zunächst zeigt die Gleichung (3.3.4.), dass $\hat{\mathbf{B}}$ und damit auch $\overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}}$ linear von $\overline{\mathbf{B}}$ abhängen, falls das Geschwindigkeitsfeld unabhängig von $\mathbf{B}$ ist. Die Taylor-Entwicklung von $\overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}}$, bei der räumliche Ableitungen bis zur ersten und zeitliche Ableitungen bis zur nullten Ordnung berücksichtigt werden, führt unter Ausnutzung dieser linearen Abhängigkeit, auf:

(3.3.5.) $$\overline{\hat{\mathrm{v}}\times\hat{\mathrm{B}}} = \overline{\overline{\alpha}}\ \overline{\mathrm{B}} - \beta\ \mathrm{rot}\ \overline{\mathrm{B}}$$

β ist eigentlich ein Tensor dritter Stufe, jedoch lässt er sich bei homogener, isotroper Turbulenz mit Hilfe einer skalaren Funktion darstellen (Prautzsch 1999).

Beiträge zum α-Tensor erhält man nur bei helikaler Turbulenz. Auf der Sonne sorgen vor allem die Rotation sowie die radiale Variation von Massendichte ρ und Turbulenzintensität, bei zwei bevorzugten Richtungen, für anisotrope Turbulenz. Unter den Annahmen, dass $\overline{\mathbf{v}}$ nur starre Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω beschreibt, dass das Geschehen mehr durch Turbulenz als durch Rotation bestimmt ist und dass ρ sowie die mittlere konvektive Geschwindigkeit in radialer Richtung einen exponentiellen Verlauf haben, erhielt Krause (1967) verschiedene Terme für $\overline{\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{B}}}$, die durch Vergleich mit (3.3.5.) dem α-Tensor und β zugeordnet werden können. Sie wurden für den Fall guter Leitfähigkeit ($\sigma \to \infty$) eingesetzt, welche durch Zustand II vorausgesetzt wurde.
Anisotropie nur aufgrund von Rotation hat bei guter Leitfähigkeit keine Auswirkung. Die radiale Vorzugsrichtung alleine führt zu einem antisymmetrischen Beitrag im α-Tensor. Die Kombination der beiden Vorzugsrichtungen produziert sowohl antisymmetrische als auch symmetrische Anteile des α-Tensors.

Einsetzen der Gleichungen (3.3.3.) und (3.3.5.) führt zu:

(3.3.6.) $$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\ \left(\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} + \overline{\overline{\alpha}}\ \overline{\mathbf{B}} - (\eta + \beta)\ \mathrm{rot}\ \overline{\mathbf{B}} \right)$$

Dies zeigt, dass unter den erwähnten Voraussetzungen

- α einen Strom induziert, der parallel oder antiparallel zum ursprünglichen Magnetfeld fließt.
- β einer zusätzlichen magnetischen Diffusivität entspricht.

3.4. Entdimensionierung der Variablen

Um im Simulationsprogramm mit den Variablen numerisch frei hantieren zu können, ist es sinnvoll, die dimensionsbehafteten Variablen und das Magnetfeld mit typischen Werten zu skalieren und so zu entdimensionieren. Dadurch wird erreicht, dass in allen Rechnungen die relevanten Werte eine ähnliche Größenordnung haben.

(3.4.1.) $$r = R_\odot \tilde{r}\,, \qquad t = T_{Diff}\,\tilde{t}\,, \qquad |\mathbf{B}| = B_0 \left| \tilde{\mathbf{B}} \right|$$

Für den Fall, dass (η + β) als konstant angenommen werden können, gilt außerdem die folgende Aussage:

(3.4.2.) $\eta_0 = (\eta + \beta)$

$T_{Diff} = \frac{R_\odot^2}{\eta_0}$ entspricht dann der sogenannten Diffusionszeitskala.

Der Sonneradius ist eine der gut messbaren Größen und beläuft sich auf: $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ cm.
η_0 bewegt sich dagegen in einem relativ großen bisher nicht genau bestimmbaren Wertebreich zwischen $\eta_0 = 10^{11}$cm²/s und $\eta_0 = 10^{13}$ cm²/s. Je nachdem wie viel Turbulenz man in seinem Modell zulässt kann sich η_0 und damit die Diffusionszeitskala um Größenordnungen ändern.

Mit der Einführung der dimensionslosen Reynoldszahlen

(3.4.3.) $R_\Omega = \Omega_0 T_{Diff}$ (ro), und

(3.4.4.) $R_\alpha = \frac{\alpha_0 T_{Diff}}{R_\odot}$ (ra),

kann im Programm die Stärke der induktiven Prozesse im Verhältnis zur Diffusion angegeben werden. Die maximale Rotationsrate Ω_0 ist ein gesicherter Wert: $\Omega_0 = 2.874$ µrad/s. Allerdings hängt α_0 auch von der Turbulenz ab und unterliegt damit ähnlichen Unsicherheiten wie η_0.
Für die vorliegende Arbeit ergeben sich also zum Beispiel für $\eta_0 = 10^{13}$ cm²/s und $\alpha_0 = 100$ m/s die folgenden Werte: T_{Diff} = 15 Jahre, R_Ω = 1400 und R_α = 70 (Prautzsch 1999).
Bei einer beobachteten Periode von 22 Jahren ergibt sich somit, dass eine Periode in der vorliegenden Arbeit einer umgerechneten Dauer von 1.47 T_{Diff} oder einer Frequenz $\omega = 4.28$ entsprechen müsste.

3.5. Die Zerlegung in poloidale und toroidale Anteile

Das Magnetfeld der Sonne lässt sich unter bestimmten Bedingungen in ein poloidales und ein toroidales Magnetfeld zerlegen. Das poloidale Feld hat dabei nur Anteile in r-Richtung (Radius / Schichtung) und θ-Richtung (theta / Breitenabhängigkeit). Das toroidale Feld hat nur eine ϕ-Komponente.

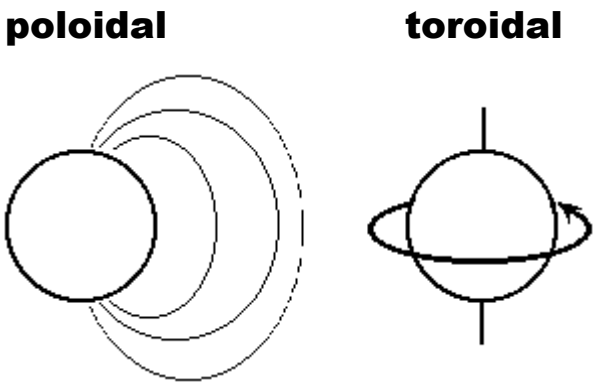


Abb.: 3.5.1. Die Zerlegung des allgemeinen Magnetfeldes in ein poloidales und in ein toroidales Magnetfeld.

Der Vorteil dieser Zerlegung wird später im Kapitel deutlich, denn es ist möglich das poloidale Magnetfeld als ein toroidales Vektorpotential in Abhängigkeit von r und θ auszudrücken, solange (3.2.3.) gilt.

Weitere angenommene Zustände auf der Sonne:

- Zustand IV: Die Sonne besitzt ein mittleres axialsymmetrisches Magnetfeld.
- Zustand V: Die Sonne besitzt ein mittleres axialsymmetrisches, toroidales Geschwindigkeitsfeld.
- Zustand VI: $(\eta + \beta)$ ist konstant, wie in (3.4.2.) vorausgesetzt.

Axialsymmetrie bedeutet Invarianz gegenüber dem Winkel ϕ $(\partial / \partial\varphi = 0)$. Alle folgenden Aussagen sollen immer mittlere Größen betreffen. Das Magnetfeld lässt sich in diesem Fall mit Hilfe von zwei skalaren Größen darstellen. Dazu wird es in seinen toroidalen (ϕ-Komponente) und poloidalen Anteil (r- und die θ-Komponenten) aufgespalten.

(3.5.1.) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{tor} + \mathbf{B}_{pol} \quad \mathbf{B}_{tor} = (0,0,B_\phi(r,\theta)) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{pol} = (B_r(r,\theta),B_\theta(r,\theta),0)$

Wegen Zustand IV und der Divergenzfreiheit von **B** (3.2.3.) lässt sich $\mathbf{B}_{pol}$ durch ein toroidales Vektorpotential **A** darstellen.

(3.5.2.) $\mathbf{B}_{pol} = (B_r(r,\theta),B_\theta(r,\theta),0) = \text{rot}\ \mathbf{A} = \text{rot}\ (0,0,A(r,\theta))$

Mit Zustand V und (3.5.2.) lässt sich die Induktionsgleichung (3.3.6.) in ihre poloidale und toroidale Komponente zerlegen:

(3.5.3.) $\dot{B}_{tor} = \text{rot}\,(v \times B_{pol} + (\bar{\bar{\alpha}}\ B)_{pol} - (\eta+\beta)\ \text{rot}\ B_{tor}\ )$

(3.5.4.) $\dot{A} = (\bar{\bar{\alpha}}\ \mathbf{B})_{tor} - (\eta+\beta)\ \mathbf{rot\ rot\ A}\ )$

Nachdem die theoretische Form der toroidalen und poloidalen Anteile des jeweiligen α-Terms an den beiden Gleichungen errechnet wurde, musste die Zerlegung in die endgültige numerische Form folgen. Im Simulationsprogramm wurden die Ableitungen unter Anwendung der expliziten Dreipunktgleichung für ein bekanntes Feld benutzt.
Die genaue Rechnung kann im Anhang A nachgesehen werden.

3.6. Entwicklung des alpha-Tensors

Die vorliegende Arbeit hat als zentralen Schritt den Ausbau des α-Tensors. Deshalb wird dieser in diesem Kapitel ausführlich hergeleitet. Die übrigen Anteile der Gleichung befanden sich bereits im Simulationsprogramm von Prautzsch (1999) und wurden ohne eine Änderung direkt übernommen, deswegen werden sie hier auch nicht weiter hergeleitet.

Zunächst soll der α-Tensor nach Krause & Rädler (1980) hergeleitet werden. Für die in dieser Arbeit gewollte Einschränkung von zwei Vorzugsrichtungen wurde bei Krause & Rädler (1980, S. 193f) eine allgemeine Form angegeben, die hier für die Schichtung und die Rotation explizit ausgerechnet werden soll. Die Rechnungen sind alle in Kugelkoordinaten ausgeführt worden.

Bei Krause & Rädler wird der α-Tensor dabei in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{rr} & \alpha_{r\theta} & \alpha_{r\varphi} \\ \alpha_{\theta r} & \alpha_{\theta\theta} & \alpha_{\theta\varphi} \\ \alpha_{\varphi r} & \alpha_{\varphi\theta} & \alpha_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix}$$

Also:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 - \gamma_3 & \alpha_5 + \gamma_2 \\ \alpha_4 + \gamma_3 & \alpha_2 & \alpha_6 - \gamma_1 \\ \alpha_5 - \gamma_2 & \alpha_6 + \gamma_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Der α-Tensor wird bei Krause & Rädler noch in weitere Terme zerlegt, die hier aber vernachlässigt werden sollen.

Meine Überlegungen beginnen mit der folgenden Darstellung von Krause & Rädler für den symmetrischen Anteil:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\alpha}} \circ \vec{B} = \; & \alpha^{(0)} \left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right)\vec{B} \\ & +\alpha^{(1)} \left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right) \left(\hat{r}\cdot\vec{B}\right)\hat{r} \\ & +\alpha^{(2)} \left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right)\left(\hat{\omega}\cdot\vec{B}\right)\hat{\omega} \\ & +\alpha^{(3)} \left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right)\left((\hat{r}\times\hat{\omega})\cdot\vec{B}\right)(\hat{r}\times\hat{\omega}) \\ & +\alpha^{(4)}\left[\left(\hat{\omega}\cdot\vec{B}\right)\hat{r}+\left(\hat{r}\cdot\vec{B}\right)\hat{\omega}\right] \\ & +\alpha^{(5)} \left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right)\left[\left((\hat{r}\times\hat{\omega})\cdot\vec{B}\right)\hat{r}+\left(\hat{r}\cdot\vec{B}\right)(\hat{r}\times\hat{\omega})\right] \\ & +\alpha^{(6)}\left[\left((\hat{r}\times\hat{\omega})\cdot\vec{B}\right)\hat{\omega}+\left(\hat{\omega}\cdot\vec{B}\right)(\hat{r}\times\hat{\omega})\right]\end{aligned}$$

Der antisymmetrischen Anteil wird wir folgt angegeben:

$$\vec{\gamma} = \gamma^{(1)}\hat{r} + \gamma^{(2)}\left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right) + \gamma^{(3)}\left(\hat{r}\times\hat{\omega}\right)$$

Für den untersuchten Dynamomechanismus und dessen Vorzugsrichtungen gelten folgende bestimmende Einheitsvektoren :

Schichtung: $\hat{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und Rotation: $\hat{\omega} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\\0\end{pmatrix}$

Für den symmetrischen Anteil ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\alpha}}_{sym} = \; & \alpha^{(0)}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} + \alpha^{(1)}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha^{(2)}\begin{pmatrix}\cos^3\theta & -\cos^2\theta\sin\theta & 0\\ -\sin\theta\cos^2\theta & \cos\theta\sin^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ & +\alpha^{(3)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta\sin^2\theta\end{pmatrix} + \alpha^{(4)}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha^{(4)}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha^{(5)}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ & +\alpha^{(5)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha^{(6)}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta\\ 0 & 0 & \sin^2\theta\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha^{(6)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

also:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{sym} = \begin{pmatrix}\alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(1)}\cos\theta + \alpha^{(2)}\cos^3\theta + 2\alpha^{(4)}\cos\theta & -\alpha^{(2)}\cos^2\theta\sin\theta - \alpha^{(4)}\sin\theta & -\alpha^{(5)}\cos\theta\sin\theta - \alpha^{(6)}\cos\theta\sin\theta\\ -\alpha^{(2)}\sin\theta\cos^2\theta - \alpha^{(4)}\sin\theta & \alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(2)}\cos\theta\sin^2\theta & \alpha^{(6)}\sin^2\theta\\ -\alpha^{(5)}\cos\theta\sin\theta - \alpha^{(6)}\sin\theta\cos\theta & \alpha^{(6)}\sin^2\theta & \alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(3)}\cos\theta\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

Die Darstellung des antisymmetrischen Anteils ergibt sich nach Krause & Rädler wie folgt:

$$\vec{\gamma} = \gamma^{(1)}\,\hat{r} + \gamma^{(2)}\left(\hat{r}\cdot\hat{\omega}\right)\hat{\omega} + \gamma^{(3)}\left(\hat{r}\times\hat{\omega}\right)$$

Also: $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}\cos^2\theta \\ -\gamma^{(2)}\cos\theta\,\sin\theta \\ -\gamma^{(3)}\sin\theta \end{pmatrix}$

Um diesen Vektor in den allgemeinen Tensor einzufügen, muss nach Krause & Rädler $\vec{\gamma}\times\vec{B}$ berechnet werden:

$$\vec{\gamma}\times\vec{B} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_r\\ B_\theta\\ B_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_2 B_\varphi - \gamma_3 B_\theta\\ \gamma_3 B_r - \gamma_1 B_\varphi\\ \gamma_1 B_\theta - \gamma_2 B_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1\\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}B_r\\ B_\theta\\ B_\varphi\end{pmatrix}$$

mit obiger Darstellung für $\vec{\gamma}$ ergibt sich folgender antisymmetrischer Tensor:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{asym} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{(3)}\sin\theta & -\gamma^{(2)}\cos\theta\sin\theta \\ -\gamma^{(3)}\sin\theta & 0 & -\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\cos^2\theta \\ \gamma^{(2)}\cos\theta\sin\theta & \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}\cos^2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Der symmetrischen und der antisymmetrische zusammengeführt ergeben den allgemeinen α-Tensor:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(1)}\cos\theta + \alpha^{(2)}\cos^3\theta + 2\alpha^{(4)}\cos\theta & -\alpha^{(2)}\cos^2\theta\sin\theta - \alpha^{(4)}\sin\theta + \gamma^{(3)}\sin\theta & -\alpha^{(5)}\cos\theta\sin\theta - \alpha^{(6)}\cos\theta\sin\theta - \gamma^{(2)}\cos\theta\sin\theta \\ -\alpha^{(2)}\sin\theta\cos^2\theta - \alpha^{(4)}\sin\theta - \gamma^{(3)}\sin\theta & \alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(2)}\cos\theta\sin^2\theta & \alpha^{(6)}\sin^2\theta - \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\cos^2\theta \\ -\alpha^{(5)}\cos\theta\sin\theta - \alpha^{(6)}\sin\theta\cos\theta + \gamma^{(2)}\cos\theta\sin\theta & \alpha^{(6)}\sin^2\theta + \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}\cos^2\theta & \alpha^{(0)}\cos\theta + \alpha^{(3)}\cos\theta\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Die r-Abhängigkeit des Tensors steckt also nur in den α - Gliedern. Die θ – Abhängigkeit stecht allein in den trigonometrischen Funktionen. Dies gleicht der Zerlegung von des skalaren α-Terms in Faktoren wie bei Prautzsch (1999).
$\alpha(r,\theta) = \alpha_r(r) \circ \alpha_\theta(\theta)$

Der Tensor wird auf $\alpha^{(0)}$ normiert, somit gilt:

$$\overline{\overline{\alpha}}(r,\theta) = \alpha^{(0)}\cdot\mathbf{f}\left(\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(0)}}, \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(0)}}, \frac{\alpha^{(3)}}{\alpha^{(0)}}, \frac{\alpha^{(4)}}{\alpha^{(0)}}, \ldots\right)$$

3.7. Die Elemente des allgemeinen alpha-Tensors

Grundform der r – Abhängigkeit (Prautzsch 1999)**:**

(3.7.1.) $$\alpha_r(r) = \frac{1}{4}\left(1+\operatorname{erf}\frac{r-ru}{0.07}\right)\left(1-\operatorname{erf}\frac{r-0.98}{0.07}\right)$$

Abb.: 3.7.1. ru entspricht dem unteren Rand der im Programm simulierten Region.

$\alpha^{(0)}$ wird in radialer Richtung konstant gehalten und zur Erfüllung der Randbedingungen in der Simulation mit Hilfe der Fehlerfunktion an den Rändern auf Null geführt, so dass gilt:

$\alpha^{(0)}$ (ru) = 0 und $\alpha^{(0)}$ (1) = 0

Formen der θ - Abhängigkeit:

In diesem Abschnitt möchte ich die einzelnen Formen der im α-Tensor vorhandenen θ-abhängigen Funktionen darstellen. Die Darstellungen sind gruppiert nach zum Äquator hin antisymmetrischem bzw. symmetrischem Einfluss.

Die antisymmetrischen Tensorelemente:

Abb.: 3.7.2.
cos θ:
$\alpha^{(0)}$
$\alpha^{(1)}$
$\alpha^{(4)}$

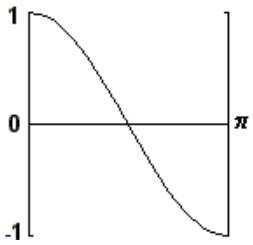


Abb.: 3.7.3.
cos θ sin²θ:
$\alpha^{(2)}$
$\alpha^{(3)}$

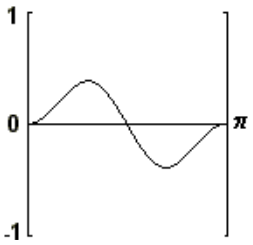


Abb.: 3.7.4.
cos³ θ:
$\alpha^{(2)}$
$\gamma^{(2)}$

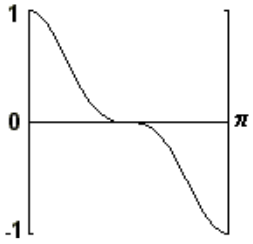
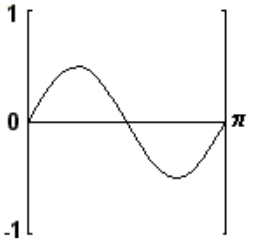


Abb.: 3.7.5.
cos θ sin θ:
$\alpha^{(5)}$
$\alpha^{(6)}$



Die symmetrischen Tensorelemente:

Abb.: 3.7.6.
sin θ:
$\alpha^{(4)}$
$\gamma^{(3)}$

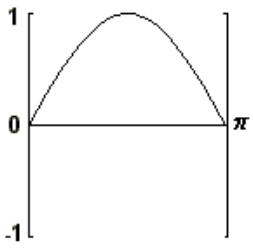


Abb.: 3.7.7.
$\sin^2\theta$:
$\alpha^{(6)}$

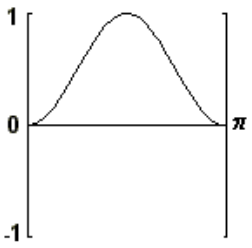
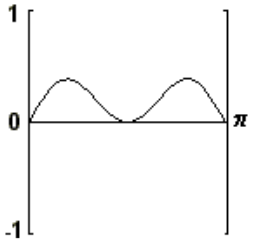


Abb.: 3.7.8.
$\cos^2\theta \sin\theta$:
$\alpha^{(2)}$



4 Ergebnisse

4.1. Betrachtung früherer Arbeiten

Grundlage für die vorliegende Arbeit waren die Arbeiten von Prautzsch (1999) und von Weißhaar (1978, 1982).
Prautzsch hat in seiner Arbeit ein αω-Dynamomodell berechnet, dessen Induktionseffekte auf die Wasserstoffkonvektionszone (WKZ) begrenzt ist. Der von Prautzsch angenommene α-Effekt ist isotrop und genügt der Gleichung $\overline{\overline{\alpha}}_\theta = \cos(\theta)\cdot\overline{\overline{E}}$. Prautzsch versuchte mit einem realistischen Rotationsgesetz die differentielle Rotation (ω) der Beobachtung anzupassen. Die Schwierigkeiten lagen darin für realistische Modelle der WKZ, die in Form und Periode der Beobachtung entsprachen, ein oszillierendes Magnetfeld zu generieren.
Weitere Probleme lagen darin, dass die Laufrichtung der Aktivitätsgebiete entweder polwärts gerichtet war (umgekehrtes Schmetterlingsdiagramm) oder gar nicht in meridionaler Richtung wanderte (Nieren- bzw. Kastenform). Außerdem war die Frequenz des oszillierenden Magnetfeldes zu hoch.
Prautzsch hat später noch einen $\alpha^2\omega$-Dynamo mit isotropem α-Effekt gerechnet, jedoch blieben die Probleme bestehen.

Weißhaar hat hingegen einen α^2-Dynamo mit anisotropem α-Effekt gerechnet. Zur Generierung des Magnetfeldes vernachlässigte er die differentielle Rotation und rechnete die magnetfelderzeugenden Effekte über die gesamte Sphäre.
Mit diesen physikalisch ebenso unwirklichen Werten gelang es ihm jedoch einen Magnetfeldzyklus zu simulieren, dessen Laufrichtung und Regionen magnetisch stärkster Aktivität den Beobachtungen deutlich besser entsprachen.

Durch diese Erfolge ermutigt sollte nun in dieser Arbeit untersucht werden, ob es möglich ist, die guten Ergebnisse aus beiden Arbeiten so in ein neues Programm zu integrieren, dass ein beobachteter, oszillierender Magnetfeldzyklus mit physikalisch realistischen Werten generiert werden kann.

Hier wurde also ein $\alpha^2\omega$ - Dynamomodell in der WKZ mit anisotropem α - Tensor und realistischem Rotationsgesetz gerechnet.
Die anisotropen Anteile des α - Effekt wurden analog zu den guten Ergebnissen von Weißhaar untersucht. Wie bei Weißhaar wurden in der vorliegenden Arbeit die Tensor-Elemente $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ ausführlich untersucht.
Von Prautzsch wurde dabei die radiale Abhängigkeit des α-Effekt übernommen und somit die radiale Position realistischer in der WKZ festgelegt.

Für den „ω-Effekt“ wurde das von Prautzsch bereits integrierte und durch die Helioseismologie beobachtete, realistische Rotationsgesetz im Programm beibehalten.

Die turbulente Diffusion ist konstant und wurde ebenfalls direkt von Prautzsch übernommen.

4.2. Konsistenztests mit dem neuen Simulationsprogramm

Da in der vorliegenden Arbeit das Simulationsprogramm von Prautzsch umgeschrieben wurde, musste als erstes die Konsistenz der simulierten Ergebnisse geprüft werden.

4.2.1. Tests mit Prautzschen Ergebnissen

Zum Nachweis der Konsistenz wurden frühere Rechnungen zu einem isotropen $\alpha\omega$- und α^2-Dynamomodell in der WKZ wiederholt gerechnet (Prautzsch 1990, 1999). Hierbei gingen die neuen Programmteile für den α - Tensor nicht mit in die Gleichungen ein. Die Ergebnisse der Simulationen vor und nach der Änderung wurden verglichen. Hierbei wurden die Datenfelder, die das Programm jeweils ausgibt, direkt verglichen und die Übereinstimmung festgestellt.
Somit wird davon ausgegangen, dass durch die Erweiterung keine Programmierfehler gemacht wurden, die das Urprogramm verändern. Sollten also wichtige Fehler im Programm sein, so wären sie jetzt im neuen bisher ausgeschalteten Programmteil zu suchen.

4.2.2. Tests mit Weißhaarschen Ergebnissen

Nachdem getestet wurde, dass das Programm mit seiner früheren Version noch konsistent ist, wenn die neuen α-Tensorelemente ausgeschaltet sind, musste getestet werden, ob das Programm in der Lage ist, die früheren Ergebnisse von Weißhaar zu reproduzieren.
Dieser Test war ungleich schwieriger, da keine früheren Simulationsdaten vorlagen. Die Ergebnisse wurden also qualitativ bewertet und verglichen.
Zu diesem Zweck wurden aus der Veröffentlichung zur Diplomarbeit von Weißhaar (1982) Werte für einen α^2-Tensor in der ganzen Sphäre mit anisotropen Anteilen abgelesen und in das Simulationsprogramm übertragen. Die Ergebnisse wurden ausgedruckt und gegenübergestellt. Daten wie Oszillationsdauer, Breitenmaxima oder Lauf der Dynamowelle wurden verglichen und festgestellt, dass die Aussagen übereinstimmen.

4.3. Der Wandel von α^2 (ganze Sphäre) zu $\alpha^2\omega$ (Schale)

Um die Einflüsse der unterschiedlichen Modelle so genau wie möglich zu untersuchen bzw. erkennen zu können, bin ich in der Diplomarbeit beide möglichen Wege von den Rechnungen Weißhaars zur vorliegenden untersuchten Simulation gegangen.
Ausgehend vom anisotropen α^2-Modell in der ganzen Sphäre wird im Kapitel 4.3.1 die Schalendicke vom inneren (unteren) Rand (ru) her verringert in Richtung des Modells von Prautzsch. Im Kapitel 4.3.2 geht dann die differentielle Rotation (ω) Schritt für Schritt stärker in die Simulation ein.
Den anderen Weg beschreiten heißt also, im Kapitel 4.3.3 zuerst die differentielle Rotation stärker werden zu lassen und dann im Kapitel 4.3.4 die Schalendicke zu verringern.

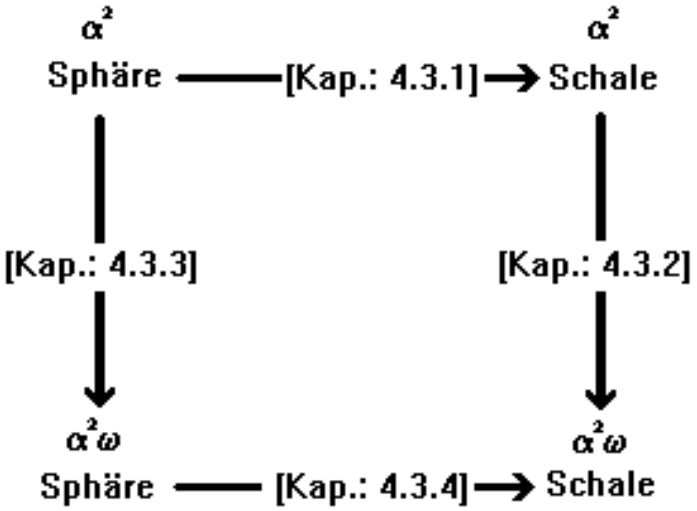


Abb.: 4.3.1. Übersicht zu den Unterkapiteln.

In den einzelnen Kapiteln wird die Veränderung jeweils einer Variable besonders beobachtet und kommentiert. Dabei werden zu Beginn eines jeden Kapitels zunächst die besonderen Parameter dieser Untersuchungsreihe aufgelistet, die dann aber nicht mehr verändert werden, damit die Grunddaten bekannt sind.
Zu den verschiedenen Simulationen wurde jeweils die kritische Dynamozahl (ra) gesucht und mit angegeben.
Der dargestellte Simulationszeitraum der Grafik wird jeweils in Diffusionszeitskalen T_{Diff} angegeben.
Ausgegeben wurde die Stärke des toroidalen Magnetfeldes $B\varphi$ in farblicher Abstufung. Für das negativ gerichtete Magnetfeld von Schwarz (Minimum) über Blau zu Weiß (Maximum) und für das positive gerichtete Magnetfeld von Schwarz (Minimum) über Rot zu Weiß (Maximum). Zu beachten ist dabei, dass die Felder nahe Null farblich nicht mehr (also Weiß) dargestellt wurden, damit die Feldstruktur deutlicher zu sehen ist.
Die Ordinate stellt die Auflösung in θ-Richtung dar, oben ist der Nordpol, unten der Äquator (die Rechnungen wurden mit angenommener Antisymmetrie des Magnetfeldes zum Äquator gerechnet). Auf der Abszisse wird der Verlauf der Zeit dargestellt.
Die Felder wurden bei ca. 1/5 der radialen Gitterauflösung unterhalb des Sonnenrands ausgegeben.
Bei geeigneten Modellen werden jeweils auch eine Serie von Meridionalschnitten der Sonne dargestellt, damit auch der radiale Verlauf der Magnetfeldentstehung beobachtet werden kann.

Die Gitterauflösung ist mit 21 Stützstellen in radialer Richtung (nr=21) und 31 Stützstellen in Theta-Richtung vom Pol zum Äquator (nt=31 / nsw=2) sehr gering, die Gültigkeit der Aussagen wurde jedoch in Einzelfällen in wesentlich höherer Gitterauflösung bestätigt. Durch die höhere Gitterauflösung wurde auch der Zeitschritt stark verkleinert, um die numerische Stabilität zu gewährleisten, dadurch verlängert sich die Rechenzeit so stark, dass die hohen realistischeren Gitterauflösungen vermieden wurden. Die zeitliche Auflösung eines Rechenschrittes (dtim) beträgt hier $3 \cdot 10^{-5}$ [T_{Diff}]. In den einzelnen Rechnungen wird jeweils die kritische Dynamozahl (ra) durch Iteration neu bestimmt. Zu jedem Bild wird der dargestellte Simulationszeitraum in Diffusionszeitskalen [T_{Diff}] und die berechnete Oszillationsfrequenz nach $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ angegeben.
Im α-Tensor werden die Elemente $\alpha^{(1)}$ = -200 und $\alpha^{(4)}$ = -100 besetzt. Die Werte wurden aus der oben genannten Veröffentlichung von Weißhaar (1982) entnommen. Zu beachten ist jedoch, dass hier nur die relative Stärke zum normierten Element $\alpha^{(0)}$ in die Rechnung eingeht. Dadurch wird die Bedeutung von $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ in der Gleichung immer relativ zu ra bzw. $\alpha^{(0)}$ festgesetzt. Die physikalische Größe wird damit nur indirekt bestimmbar.

4.3.1. α^2-Dynamomodell: Übergang von ganzer Sphäre zur Schale

In diesem Kapitel wird mit der Simulation eines α^2-Dynamomodells mit annähernd ganzer Sphäre, also unterer Rand bei 0.01 $R_\odot$ (ru=0.01) begonnen. Die differentielle Rotation bleibt ausgeschaltet (ro=0). Durch die Randbedingungen ergibt sich am Pol, sowie am Äquator, eine durchgezogene schwarze Linie, die einem Magnetfeld der Stärke Null entspricht (B_ϕ=0).

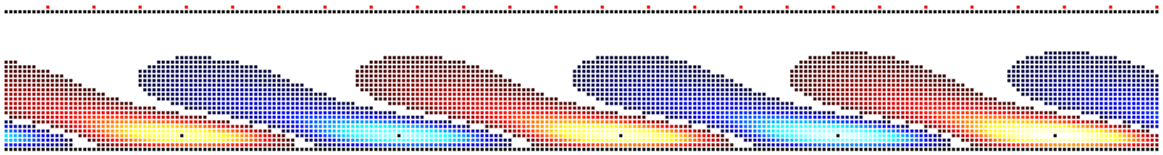


Abb.: 4.3.2. ru=0.01

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.41
Dargestellter Simulationszeitraum:	1.7925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω= 9.27

Diese erste Simulation entspricht dem Modell von Weißhaar (1982 Fig. 3b). Die Laufrichtung ist korrekt, der Aktivitätsgürtel entspricht ungefähr der Beobachtung, die Frequenz (ω=9.27) liegt im realistischen Rahmen (Kap. 3.4.).

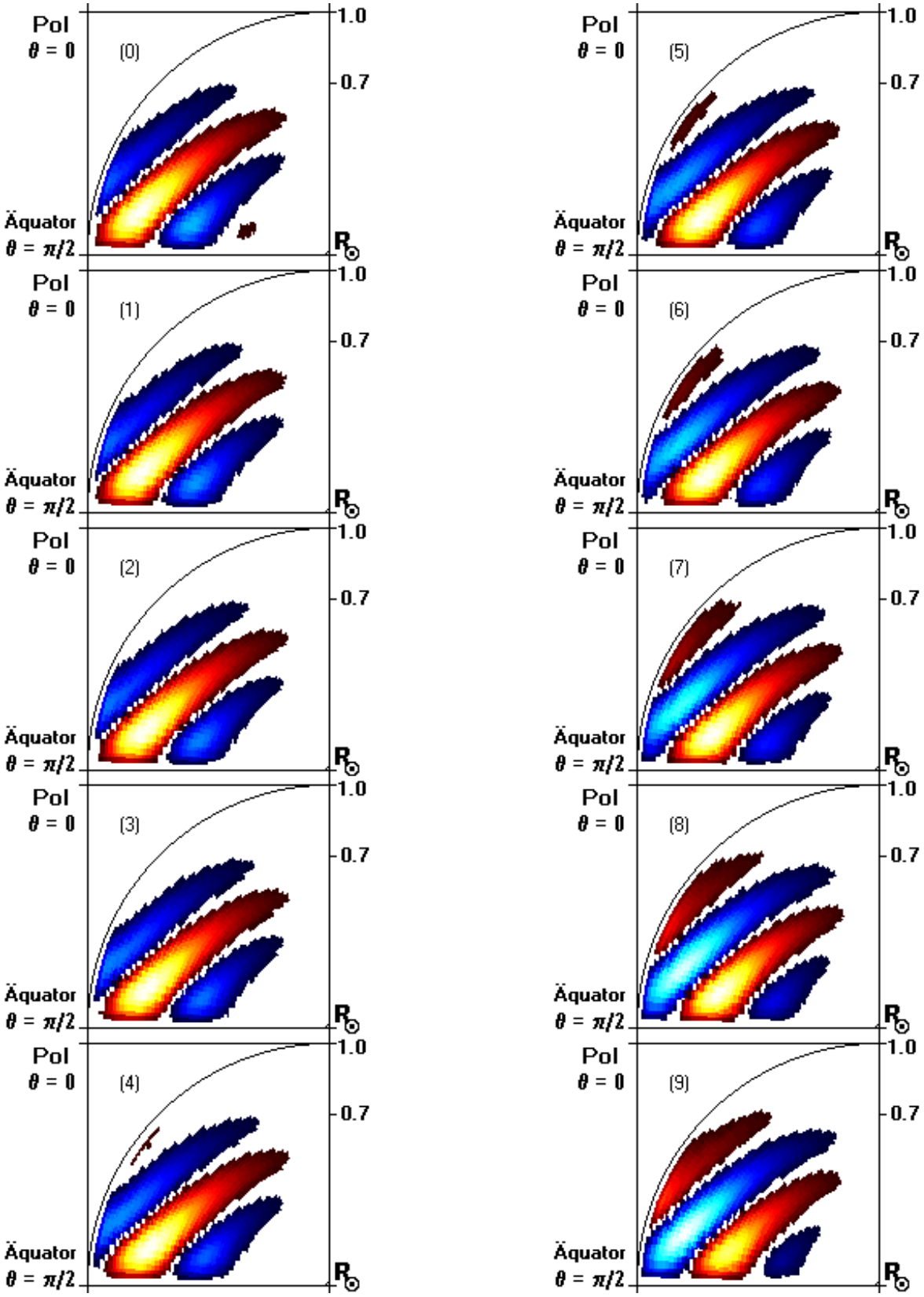


Abb.: 4.3.3. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.3.2.

In dieser Darstellung wird eine halbe Oszillation im Meridionalschnitt gezeigt. Der dargestellte Zeitraum beträgt 0.6 T_{Diff}. Der zeitliche Verlauf (0-9) zeigt eine radiale Wanderung der Magnetfelder in Richtung des Sonnenmittelpunktes.

In den folgenden Bildern wird nun der α-Effekt auf eine immer dünnere Schale begrenzt.

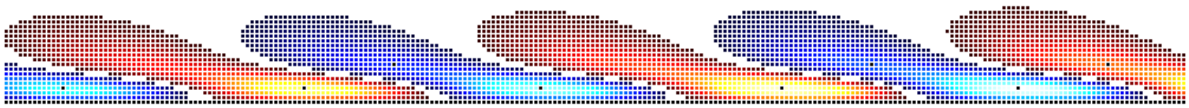


Abb.: 4.3.4. ru = 0.2

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.34
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.3925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 6.50

Als erstes fällt die geringere Oszillationsfrequenz auf. Die kritische Dynamozahl ist etwas abgefallen.

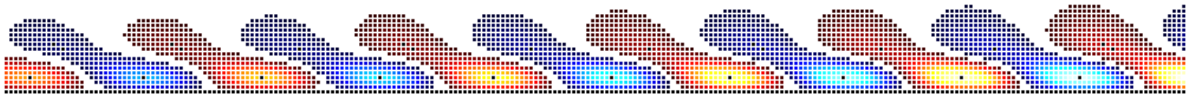


Abb.: 4.3.5. ru = 0.4

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.21
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.3925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 13.31

Am sonderbarsten erschien in diesem Fall die Beschleunigung der Oszillation. Zunächst habe ich einen Rechen- bzw. Programmfehler erwartet, besonders in Anbetracht des nächsten Schrittes. Genauere Untersuchungen ergaben jedoch die Richtigkeit der Daten und zeigten Analogien zu Prautzschen Ergebnissen (1999 S. 48). So erstaunlich dieser Fall auch ist, in diesem Rahmen soll er als interessante Frage zurückgelassen werden.

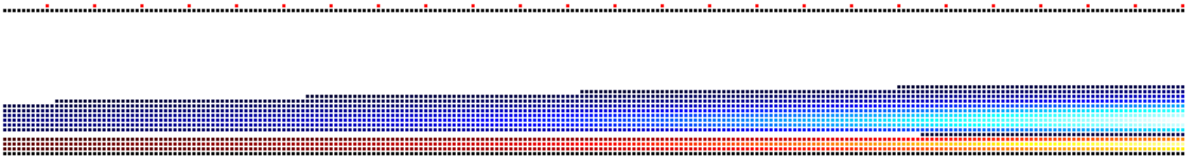


Abb.: 4.3.6. ru = 0.5

Kritische Dynamozahl:	ra = 5.80
Dargestellter Simulationszeitraum:	5.58 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω ≈ 0

Trotz zeitlich ausgedehnter Simulation begann keine Oszillation.
Das Feld ist stationär (ω≈0). Die vorher aktive Laufrichtung springt im nächsten Bild um.

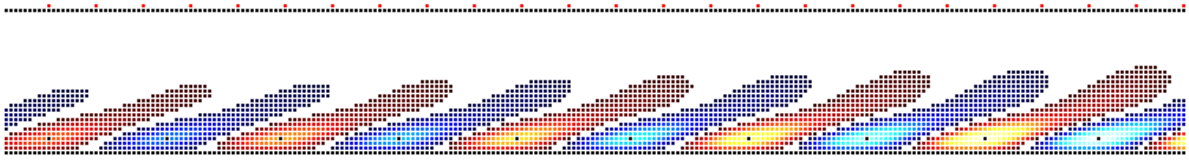


Abb.: 4.3.7. ru = 0.6

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.65
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.8925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 35.56

Die bedeutendste Veränderung ist die Umkehrung der Laufrichtung. Die Dynamowelle läuft jetzt Polwärts. Dagegen verliert die enorme Beschleunigung der Oszillation an Bedeutung. Der Wert der kritischen Dynamozahl ist wieder angestiegen.

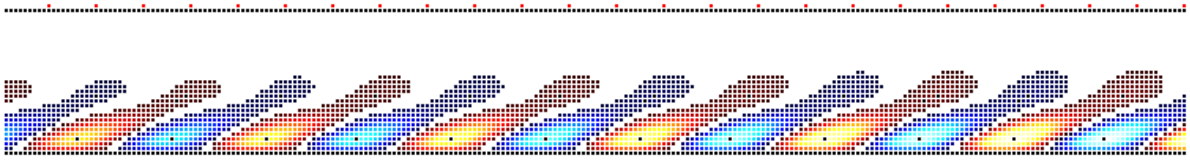


Abb.: 4.3.8. ru=0.7

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.89
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.4425 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 89.64

Der α-Effekt läuft jetzt in der von Prautzsch (1999) simulierten Schale. Die Oszillation ist weiter stark angestiegen, hat sich gegenüber der vorigen Simulation mehr als verdoppelt und ist im Vergleich zu der Ausgangssituation ≈20 mal größer.

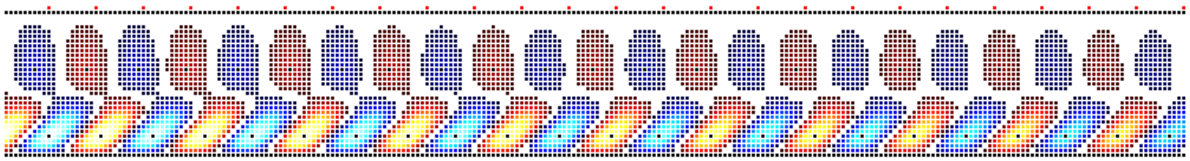


Abb.: 4.3.9. ru=0.8

Kritische Dynamozahl:	ra = 7.45
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.4425 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 165.11

Eine weitere Simulation in einer noch dünneren Schale sollte Neues zeigen, die Frequenz hat sich erneut verdoppelt. Die Aufspaltung der Dynamowelle ist in einer dünnen Schale nahe des Sonnenrandes deutlich sichtbar.
Bei einer dünnen Schale scheint die Wechselwirkung der äquatornahen Schichten in höheren Breiten durch die Diffusion geringer, deshalb wird eine eigenständige Dynamoaktivität deutlicher sichtbar. Dies ist im Meridionalschnitt besser zu sehen.

In diesem Kapitel zeigt sich die Schwierigkeit ein langsam oszillierendes und äquatorwärts laufendes Magnetfeld zu generieren, wenn der α-Effekt in einer dünnen Schale am äußeren Rand der Sonne angesetzt wird.

4.3.2. In der Kugelschale: Übergang von α^2 zu $\alpha^2\omega$

Das Dynamomodell ist jetzt bereits zu Beginn auf die Kugelschale begrenzt. Durch langsames Erhöhen der differentiellen Rotation (ro = 0.0 bis ro = 20000) wird diese allmählich dominant. Bei sehr starker differentieller Rotation findet der Übergang zum $\alpha\omega$-Dynamomodell statt. Der radiale α-Effekt (α_r) wird gänzlich auf die Werte der Prautzschen Arbeit, also auf die WKZ, eingestellt (ru = 0.7).

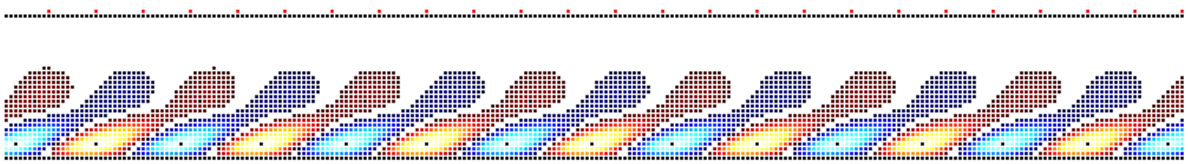


Abb.: 4.3.10. ro = 0

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.733
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 75.75

Diese Simulation gleicht von den Eingangsparametern her denen der Abb.: 4.3.8, jedoch unterscheiden sich die Ausgabewerte geringfügig. Die Ursache ist darin zu suchen, dass der Anstieg von α_r in der Schale exakt wie bei Prautzsch gerechnet werden sollte. Der Anstieg von α_r in der WKZ ist deswegen etwas weniger steil, dies führt durch die veränderten Induktionsbedingungen zu den gemessenen leichten Schwankungen.
In der Abbildung sind die grundsätzlichen Aussagen hingegen identisch: Die Laufrichtung stimmt nicht und die Frequenz ist zu hoch.

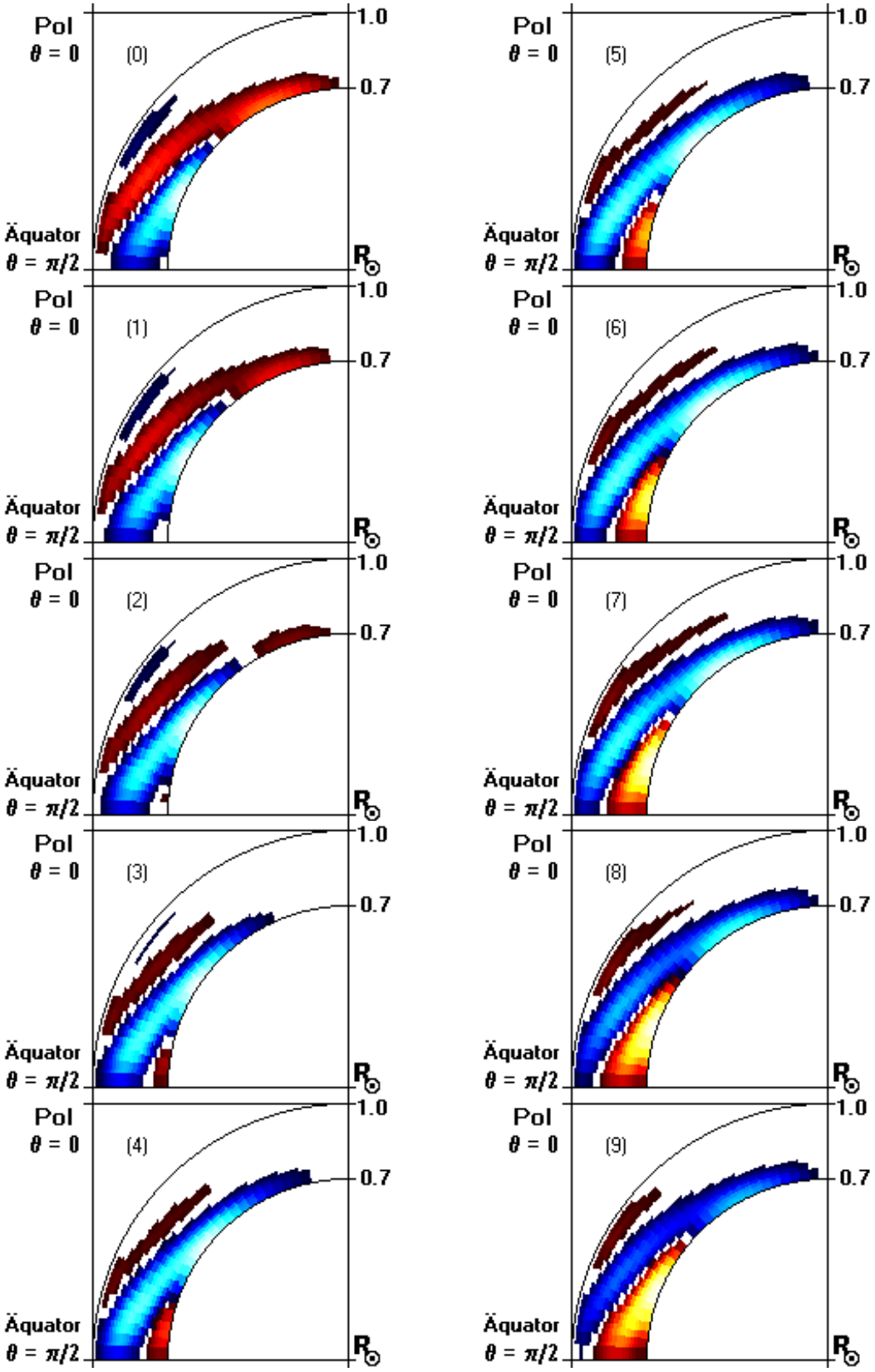


Abb.: 4.3.11. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.3.10.
Der dargestellte Zeitraum beträgt 0.042 T_{Diff}. Der zeitliche Verlauf (0-9) zeigt, dass sich auch der radiale Lauf der Dynamowelle geändert hat, welche jetzt in Richtung äußerer Sonnenrand läuft. Weiter ist zu sehen, wie das durchgängige Magnetfeld in hohen Breiten abgetrennt bzw. eigenständig wird.

Abb.: 4.3.12. ro = 1000

Kritische Dynamozahl: ra = 6.75
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 83.98

Die Oszillationsfrequenz ist etwas angestiegen. Die differentielle Rotation wird hier gleich im ersten Schritt auf ro=1000 gesetzt, da bei geringeren Werten der Einfluss zu gering ist.

Abb.: 4.3.13. ro = 1400

Kritische Dynamozahl: ra = 6.733
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω =86.72

Das Ziel, die differentielle Rotation auf realistische Werte zu bringen, ist bereits erreicht, jedoch ist eine Umkehr der Dynamowelle nicht abzusehen. Die Ergebnisse sind unbefriedigend. Die Laufrichtung ist polwärts, die Oszillationsfrequenz ist weiterhin zu hoch. Auch hier soll der Blick weiter schweifen und so wurde die differentielle Rotation noch um eine Größenordnung verstärkt. Gerade auch weil der reale Wert der magnetischen Diffusion (hier: $\eta_0 \approx 10^{13}$ cm²/s) nicht genau bekannt ist und durchaus selbst um mehr als eine Größenordnung schwanken kann.

Abb.: 4.3.14. ro = 2000

Kritische Dynamozahl: ra = 6.784
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 91.42

Auch bei diesem Wert scheint die differentielle Rotation keinen nennenswerten Einfluss gewinnen zu können, der besetzte α-Tensor ist zu stark. Die magnetische Aktivität verschiebt sich zunehmend in Richtung Äquator.

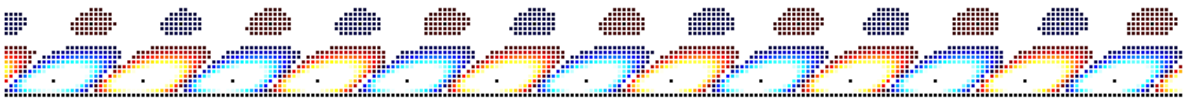


Abb.: 4.3.15. ro = 5000

Kritische Dynamozahl: ra = 6.90
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.3675 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 114.29

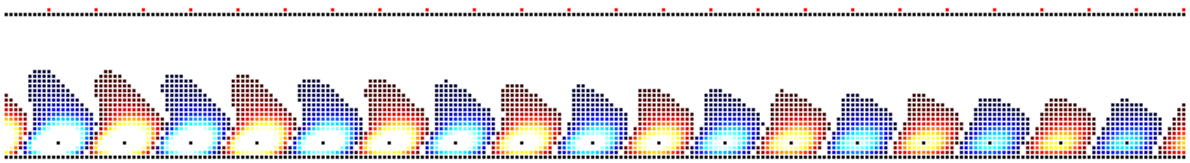


Abb.: 4.3.16. ro = 10000

Kritische Dynamozahl:	ra = 7.00
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.3675 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 151.30

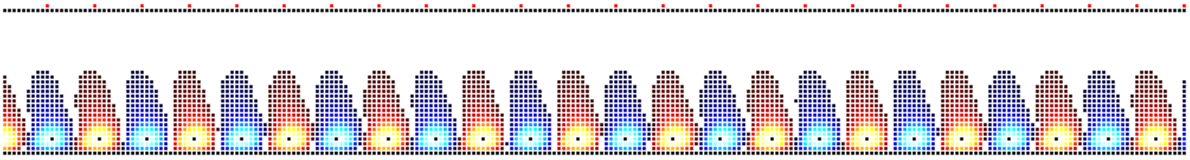


Abb.: 4.3.17. ro = 20000

Kritische Dynamozahl:	ra = 7.0
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.3675 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 210.87

Die Wanderung der Dynamowelle in Richtung Pol oder Äquator hat aufgehört.

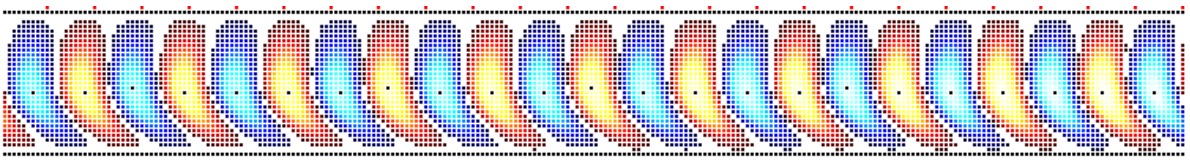


Abb.: 4.3.18. ro = 30000

Kritische Dynamozahl:	ra = 4.35
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.2175 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 335,91

Die differentielle Rotation wird übermächtig, ist jetzt so stark, dass hier eigentlich nur noch ein $\alpha\omega$ - Dynamomodell dargestellt ist. Die für diesen Fall typische nierenförmige Dynamowelle wird deutlich. Die Dynamowelle bewegt sich jetzt weder in Richtung Pol noch in Richtung Äquator. Ein weiteres Ansteigen der differentiellen Rotation führt nur zu einer deutlicheren Ausprägung der Nierenform in höheren Breiten.

4.3.3. Ganze Sphäre: Übergang von α^2 zu $\alpha^2\omega$

In diesem Kapitel wird wieder (wie in Kapitel: 4.3.1) mit der Simulation eines α^2-Dynamomodells mit ganzer Sphäre begonnen. In diesem Lauf wird zunächst die differentielle Rotation schrittweise von ro = 0.0 auf den Wunschwert ro = 2400 verstärkt und damit dominanter.

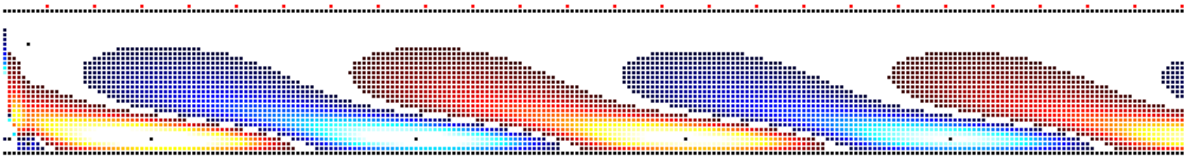


Abb.: 4.3.19. ro = 0

Kritisch e Dynamozahl:	ra = 6.40
Dargestellter Simulationszeitraum:	1.4925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 9.31

Das Ausgangsbild gleicht der Abb.: 4.3.2. Alles tendiert zur gewünschten Lösung, nur die Eingangsparameter entsprechen nicht der Beobachtung und Messung auf der Sonne.

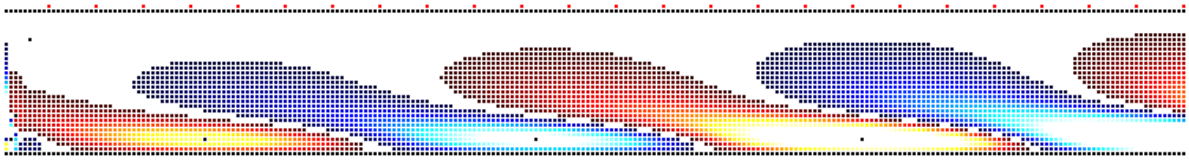


Abb.: 4.3.20. ro = 200

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.45
Dargestellter Simulationszeitraum:	1.4925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 7.57

Der Einfluss der differentiellen Rotation beginnt, die Frequenz ist gefallen und wird weiterfallen.

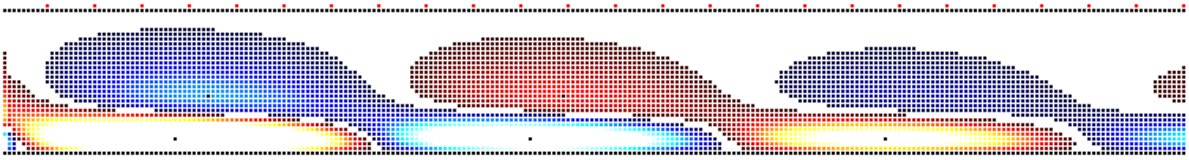


Abb.: 4.3.21. ro = 800

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.48
Dargestellter Simulationszeitraum:	5.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 1.75

Hier habe ich einen größeren Sprung zu ro = 800 gemacht, der Einfluss der differentiellen Rotation geht merklich, aber ohne Überraschungen vor sich. Die Frequenz ist weiter gefallen und nähert sich dem statischen Zustand, dem Ende der Oszillation.

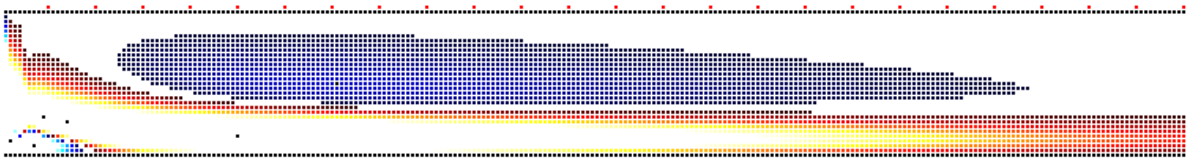


Abb.: 4.3.22. ro = 1000

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.48
Dargestellter Simulationszeitraum:	1.4925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega \approx 0$

Bei ro = 1000 wird der Einfluss der differentiellen Rotation langsam so stark, dass die Oszillation und damit auch die Dynamowelle die polwärtige Richtung beendet.

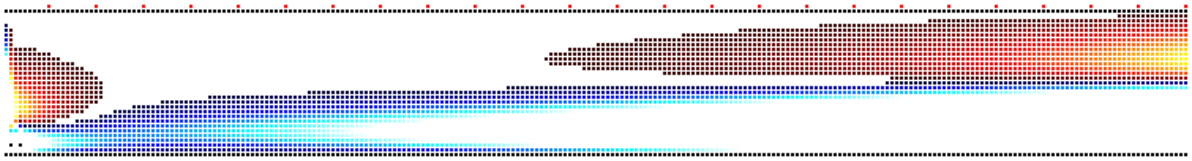


Abb.: 4.3.23. ro = 1700

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.50
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega \approx 0$

Die Wanderung des Aktivitätsgebietes in Richtung Äquators ist endgültig vorbei. Die Oszillation setzt langsam wieder ein, allerdings ist die Laufrichtung der Dynamowelle umgesprungen. Bei dem angestrebten Wunschwert (ro = 1400) ist das simulierte Magnetfeld stationär. Diese interessante Simulation ist hier nicht dargestellt, da das Kapitel 4.3.4 mit der hier übersprungenen Simulation in Abb.: 4.3.27. beginnt.

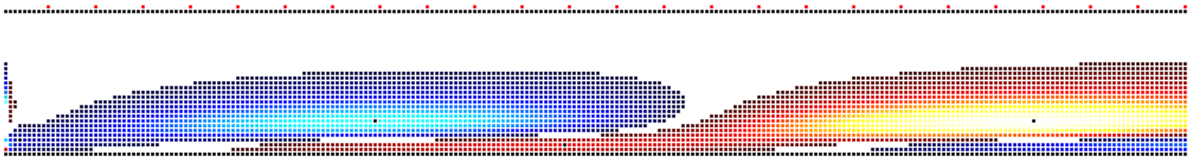


Abb.: 4.3.24. ro = 2100

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.62
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega = 1.89$

Die langsam einsetzende Oszillation ist deutlich zu sehen. Jetzt beginnt der Einfluss der differentiellen Rotation schnell größer zu werden.

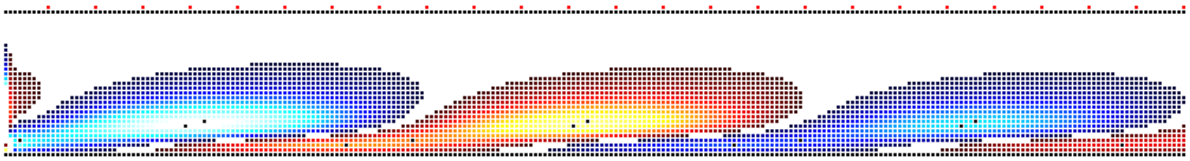


Abb.: 4.3.25. ro = 2200

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.62
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega = 3.22$

Ein weiterer Anstieg der differentiellen Rotation um knappe 5% (ro=2200) bringt bereits eine Verdoppelung der Frequenz.

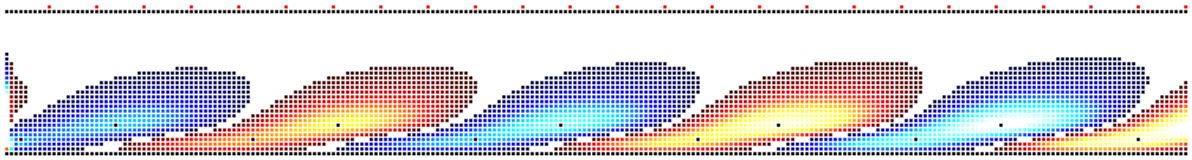


Abb.: 4.3.26. ro = 2400

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.65
Dargestellter Simulationszeitraum:	2.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega = 5.61$

Eine weitere Erhöhung der differentiellen Rotation birgt keine Überraschungen mehr, die Oszillation wird weiterhin beschleunigt. Scheinbar arbeitet die differentielle Rotation dem α-Effekt entgegen. Bei solch starker differentieller Rotation ist dann der α-Effekt einfach nicht mehr ausreichend. Höhere Werte für die besetzten α-Tensorelemente wären jedoch physikalisch ebenso unrealistisch.

4.3.4. $\alpha^2\omega$-Dynamomodell: Übergang von ganzer Sphäre zur Schale

In diesem Kapitel wird bei einem Startwert für ein realistisches Rotationsgesetz (ro = 1400) begonnen. Das Modell der annähernd vollständigen Sphäre wird verlassen und die Induktionseffekte werden nach und nach in einer Kugelschale abnehmender Dicke platziert. Der Wert der differentiellen Rotation wird nicht mehr verändert.
Die Startbedingungen lassen wenig Hoffnung zu, da bereits jetzt die Oszillation nicht mehr messbar ist. Aus Kapitel 4.3.1 wissen wir, dass der Übergang zur Schale allein bereits zu einer Umkehr der Laufrichtung geführt hat.

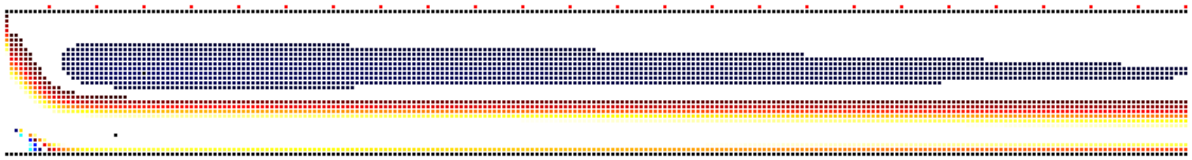


Abb.: 4.3.27. ru = 0.01

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.43
Dargestellter Simulationszeitraum:	5.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	$\omega \approx 0$

Das $\alpha^2\omega$-Dynamomodell in annähernd ganzer Sphäre mit dem nach Weißhaar besetzten α-Tensor zeigt leider nur ein stationäres Feld.

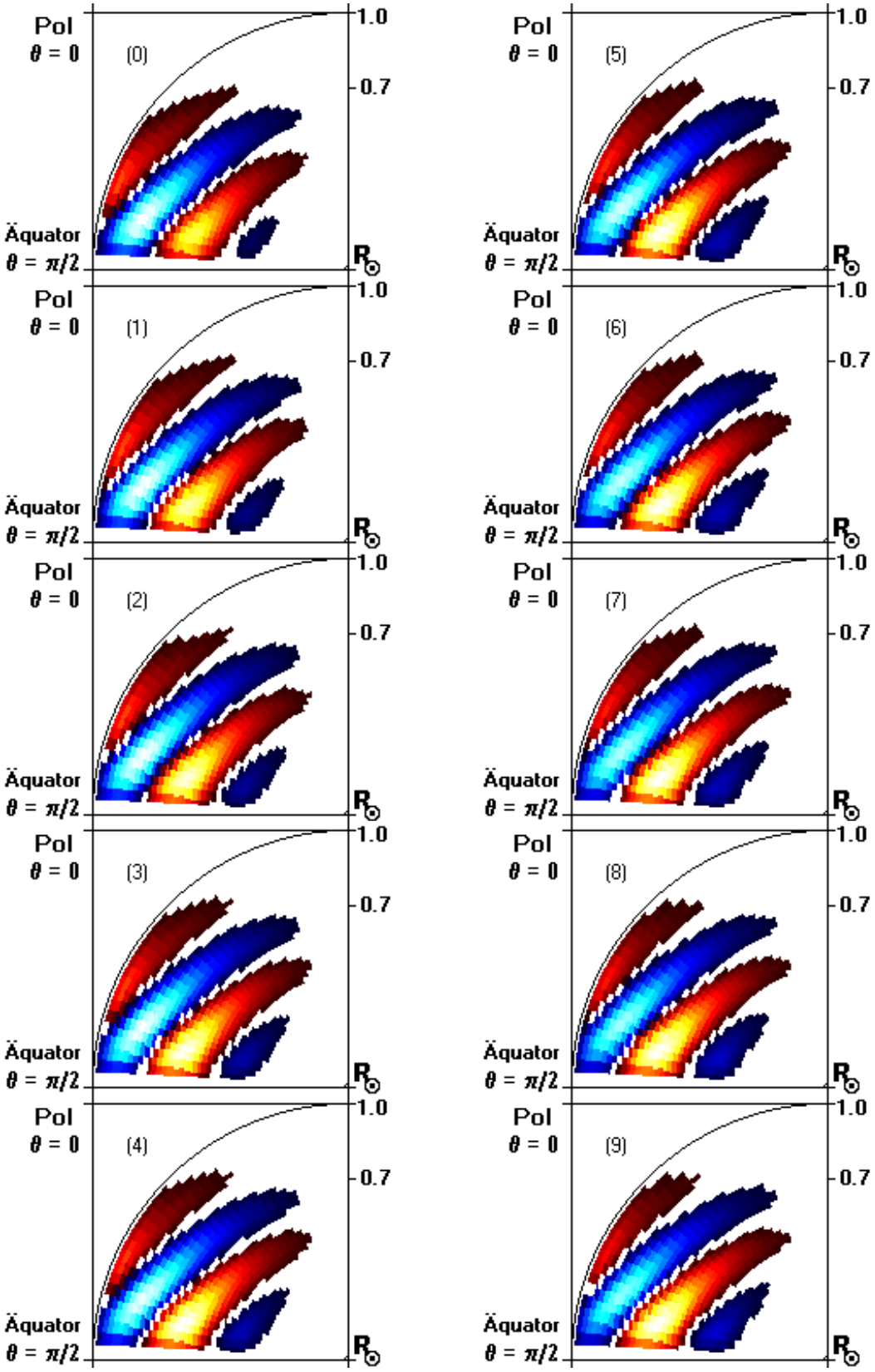


Abb.: 4.3.28. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.3.27.
Der dargestellte Zeitraum beträgt 2.0 T_{Diff}. Der zeitliche Verlauf (0-9) zeigt eine radiale Wanderung der Magnetfelder vom Kern weg. Es ist keine bzw. nur eine schwache Veränderung in diesem relativ langen Zeitraum zu sehen.

In den weiteren Bildern wird nun mit einer immer dünneren Schalendicke gerechnet.

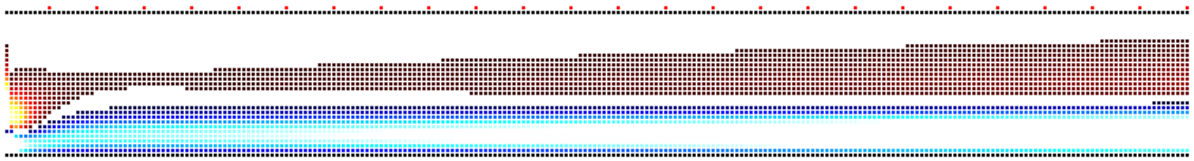


Abb.: 4.3.29. ru = 0.20

Kritische Dynamozahl: ra = 6.38
Dargestellter Simulationszeitraum: 5.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega \approx 0$

Die breitenabhängige Laufrichtung hat sich bereits umgekehrt. Die Oszillationsfrequenz ist weiterhin nicht messbar.

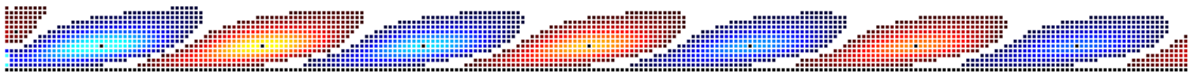


Abb.: 4.3.30. ru = 0.30

Kritische Dynamozahl: ra = 6.43
Dargestellter Simulationszeitraum: 5.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 3.82$

Bei einer 70%igen Schale ist also bereits eine Oszillation vorhanden. Eine erneute Umkehr der Laufrichtung zum Äquator ist nicht zu erwarten.

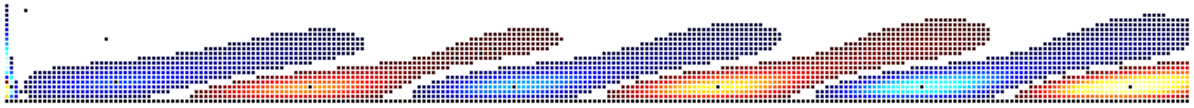


Abb.: 4.3.31. ru = 0.40

Kritische Dynamozahl: ra = 6.45
Dargestellter Simulationszeitraum: 1.4925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 12.38$

Die Oszillation ist deutlich, die folgende Rechnung hat überrascht.

Abb.: 4.3.32. ru = 0.50

Kritische Dynamozahl: ra = 6.00
Dargestellter Simulationszeitraum: 5.9925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega \approx 0$

Ähnlich wie in der Abb.: 4.3.6. wird hier plötzlich und unerwartet im Bereich um ru = 0.5 ein statisches Feld auf. Dies erhärtet die Behauptung, dass es sich um keinen Programmfehler handelt und dass hier zukünftige Fragen offen bleiben. Hier war keine Oszillation zu finden bzw. anzuregen. Die Frequenz ist auf nahe Null gesunken.

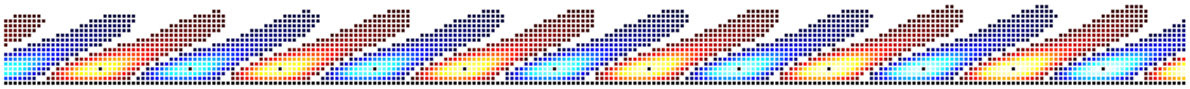


Abb.: 4.3.33. ru = 0.60

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.6
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.8925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 45.60

In diesem Schritt wird Abb.: 4.3.31. weitergeführt, als wäre der stationäre Fall in Abb.: 4.3.32. nicht vorhanden. Die Oszillationsfrequenz hat weiter zugenommen.

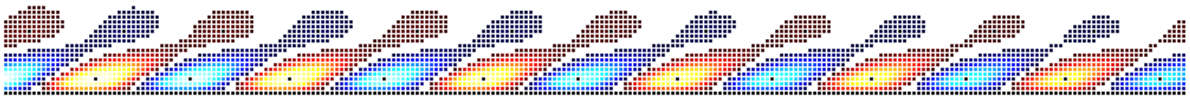


Abb.: 4.3.34. ru = 0.70

Kritische Dynamozahl:	ra = 6.77
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.4425 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 86.58

Der bereits aus Abb.: 4.3.13. bekannte Zustand ist erreicht. Die Eingabeparameter des Dynamomodells entspricht den Beobachtungen, die simulierten Werte nicht. Eine letzte Rechnung mit weiter verringerter Schalendicke soll den Abschluss bilden.

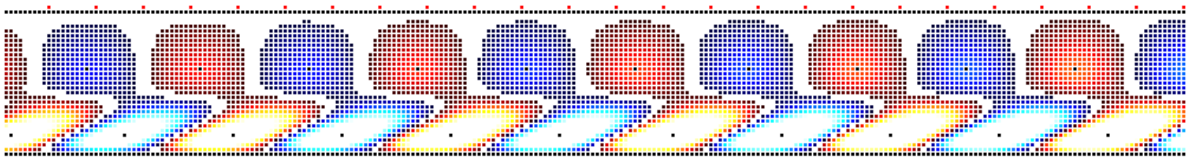


Abb.: 4.3.35. ru = 0.80

Kritische Dynamozahl:	ra = 7.8
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.2175 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 155.65

Zwei scheinbar eigenständige angeregte Dynamowellen bzw. Aktivitätszonen sind sichtbar. Während die polnahe keine Laufrichtung aufweist, besitzt die Äquatornahe eine Laufrichtung zum Pol hin.

In den folgenden Meridionalschnitten wird der Lauf der Dynamowelle deutlicher und wie die Abb.: 4.3.34. entsteht wird verständlich. In Äquatornähe ist die Magnetfelderzeugung besonders stark. Das Magnetfeld wandert in Richtung Pol ab und teilt dort das bestehende Magnetfeld auf. Ein Teil wird an die Oberfläche gedrückt, der andere Teil wird meridional in Richtung Pol gedrückt und aufgelöst.

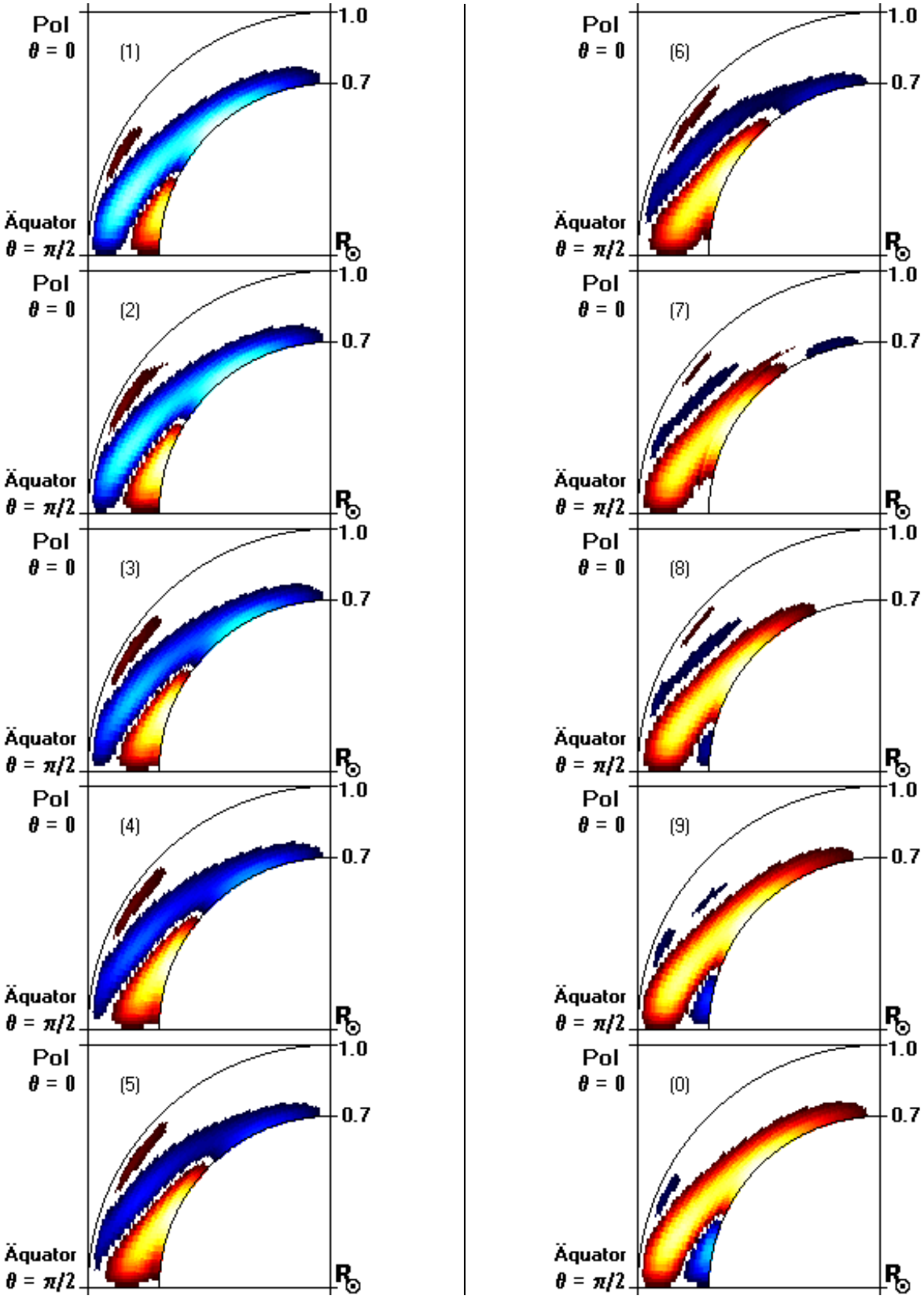


Abb.: 4.3.36. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.3.34.
Der dargestellte Zeitraum beträgt 0.0375 T_{Diff}. Der zeitliche Verlauf (1-10) zeigt die oben beschriebene radiale Wanderung der Magnetfelder vom Kern weg.

Die Form des Schmetterlingsdiagrammes aus der Arbeit von Weißhaar (1982 Fig. 3b) konnte mit dem dort angewandten anisotropen α-Tensor in dieser Arbeit nicht erhalten werden. In den nächsten Abschnitten soll im Einzelnen verdeutlicht werden, welchen wichtigen Einfluss diese Tensorelemente auf die Simulationsergebnisse haben.

4.4. Die Vorzeichenkombinationen von $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(4)}$ und ra

Ausgehend von der Erkenntnis aus Kapitel (4.3), dass ein α-Tensor mit $\alpha^{(1)}$ = -200 und $\alpha^{(4)}$ = -100 zu keiner gewünschten Oszillation führt, soll untersucht werden, welchen Einfluss die Vorzeichen auf das untersuchte Dynamomodell haben. Dabei wird jetzt die differentielle Rotation auf den gewünschten Wert fest eingestellt (ro=1400). Ebenso wird die Dicke der Kugelschale auf die WKZ begrenzt und nicht mehr verändert.
Im folgenden werden alle acht mögliche Kombinationen zur Übersicht dargestellt. Mit einem knappen Zyklus im Meridionalschnitt soll der Aufbau des Zyklus im Sonneninneren veranschaulicht werden.

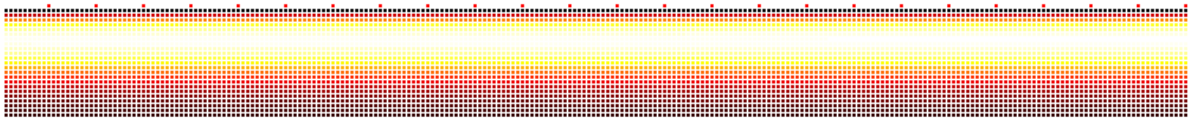


Abb.: 4.4.1. $\alpha^{(1)}$ = +100 und $\alpha^{(4)}$ = +100
negative Kritische Dynamozahl: ra = -0.89
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω ≈ 0

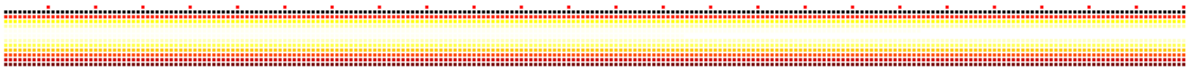


Abb.: 4.4.2. $\alpha^{(1)}$ = +100 und $\alpha^{(4)}$ = +100
positive Kritische Dynamozahl: ra = 0.96
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω ≈ 0

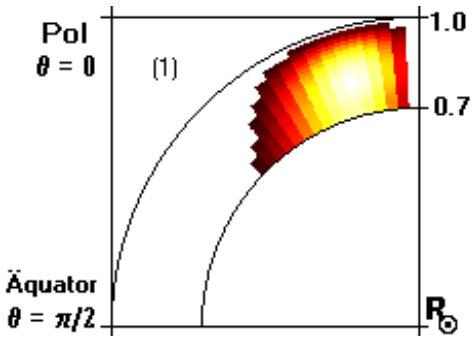


Abb.: 4.4.3. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.4.2.

Am ehesten entspricht dies einem typischen, stationären α^2-Dynamomodell. Die leichten Unterschiede bei verschiedenen Vorzeichen der kritischen Dynamozahl (ra) begründen sich wohl in der differentiellen Rotation, da sich ein Vorzeichenwechsel im α^2-Modell allein nicht auswirken würde.

In dieser bereits von Weißhaar (1982, Fig. 4b) betrachteten Kombination, stellt sich die gewünschte Laufrichtung ein, allerdings liegt der Aktivitätsgürtel noch in zu hohen Breiten. Deswegen lag diese Kombination zunächst nicht im Mittelpunkt des Interesses.

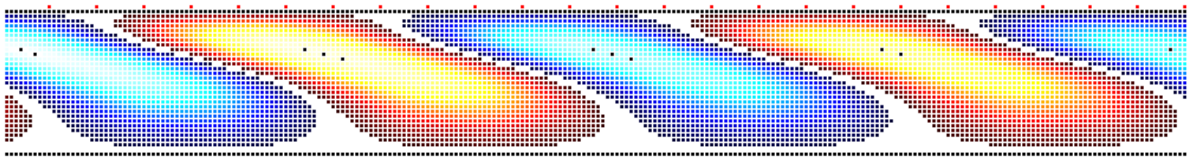


Abb.: 4.4.4. $\alpha^{(1)} = -100$ und $\alpha^{(4)} = +100$
negative kritische Dynamozahl: ra = -1.53
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.9975 [T_{Diff}]
Oscillationsfrequenz: $\omega = 12.80$

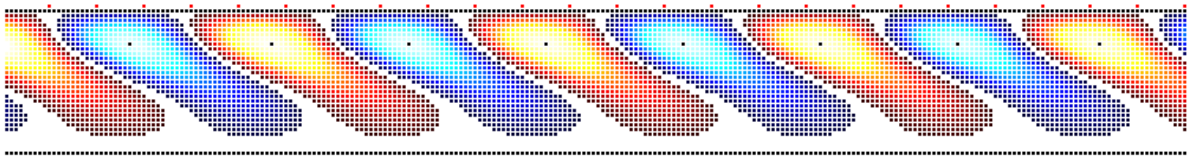


Abb.: 4.4.5. $\alpha^{(1)} = -100$ und $\alpha^{(4)} = +100$
positive kritische Dynamozahl: ra = +1.81
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.9975 [T_{Diff}]
Oscillationsfrequenz: $\omega = 27.15$

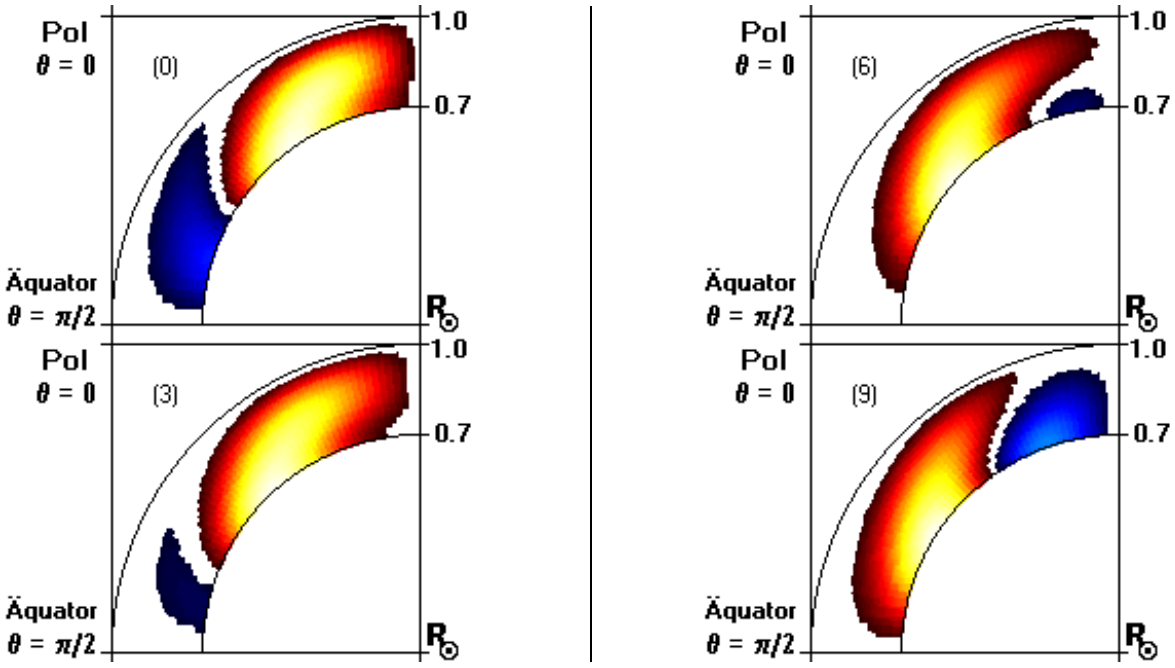


Abb.: 4.4.6. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.4.5.

Im α - Tensor eingesetzt, führt die Wahl der Vorzeichen dazu, dass die Größenordnungen der einzelnen Tensorelemente α_{rr}, $\alpha_{r\theta}$ und $\alpha_{\theta r}$ gleich sind.
Dieser Fall soll in den folgenden Abschnitten näher untersucht werden, da die Laufrichtung des Magnetfeldzyklus hier in äquatorialer Richtung verläuft. Die Laufrichtung ändert sich im $\alpha^2\omega$-Modell bei einem Vorzeichenwechsel der kritischen Dynamozahl (ra) nicht.

Auch hier haben die einzelnen Tensorelemente α_{rr}, $\alpha_{r\theta}$ und $\alpha_{\theta r}$ gleiche Größenordnungen. Als Änderung kommt hier hinzu, dass α_{rr} und $\alpha_{\phi\phi}$ jeweils entgegengesetztes Vorzeichen haben, dies scheint zu genügen, die Laufrichtung zum Pol hin umzukehren.

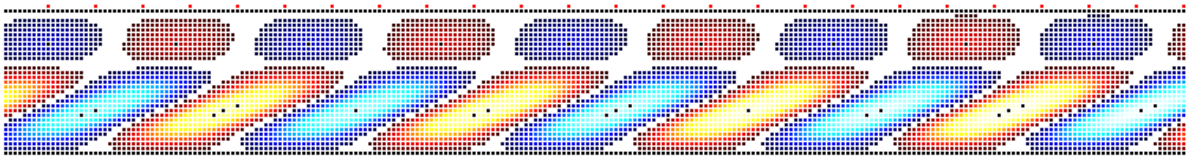


Abb.: 4.4.7. $\alpha^{(1)} = +100$ und $\alpha^{(4)} = -100$
negative kritische Dynamozahl: ra = -3.25
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 47,94

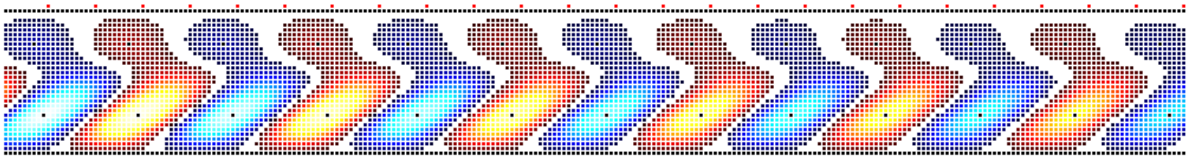


Abb.: 4.4.8. $\alpha^{(1)} = +100$ und $\alpha^{(4)} = -100$
positive kritische Dynamozahl: ra = 3.35
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 66,95

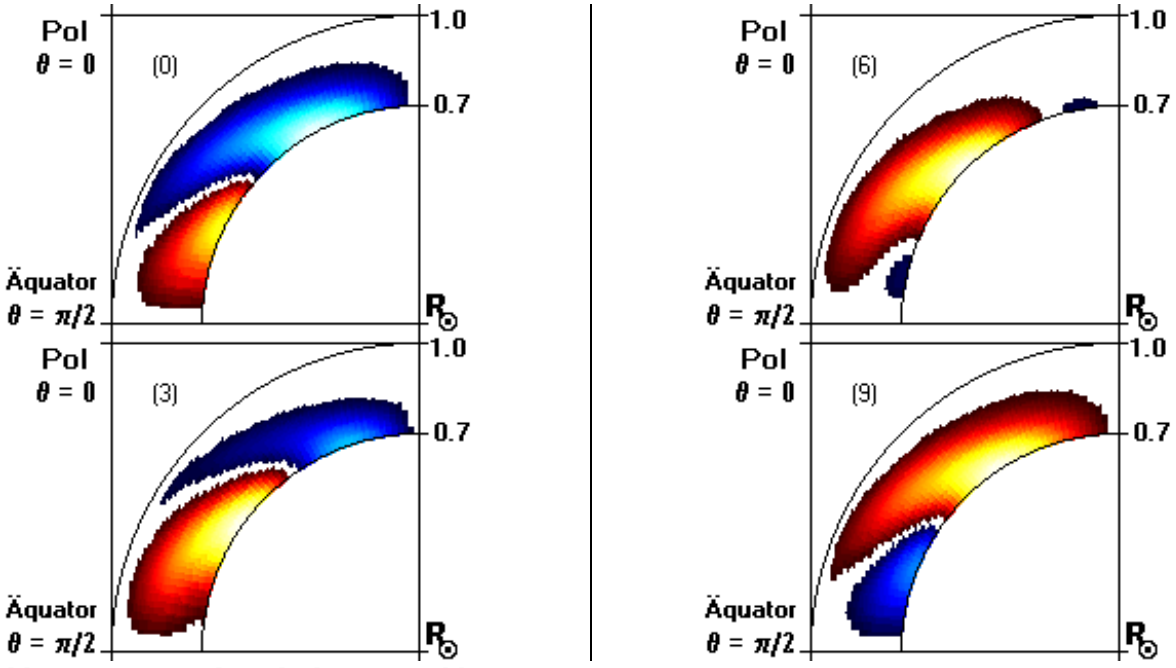


Abb.: 4.4.9. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.4.8.

Im Meridionalschnitt wird die polwärts wandernde Dynamowelle deutlich. Außerdem ist der Unterschied der Ausbreitungsrichtung zur vorigen Untersuchung in Abb.: 4.4.7. gut zu erkennen.

Diese Vorzeichenkombination entspricht dem im vorigen Kapitel sehr genau untersuchten Dynamomodell von Weißhaar (1982, Fig. 3b).

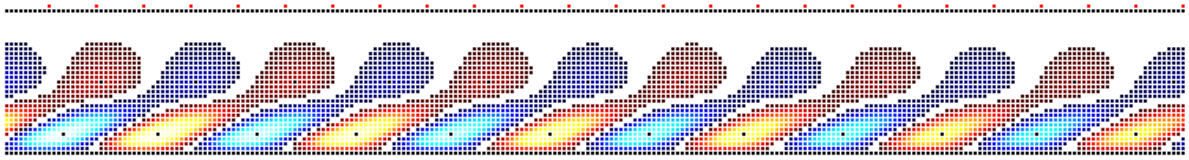


Abb.: 4.4.10. $\alpha^{(1)} = -100$ und $\alpha^{(4)} = -100$

negative kritische Dynamozahl: ra = -5.47

Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 63.88$

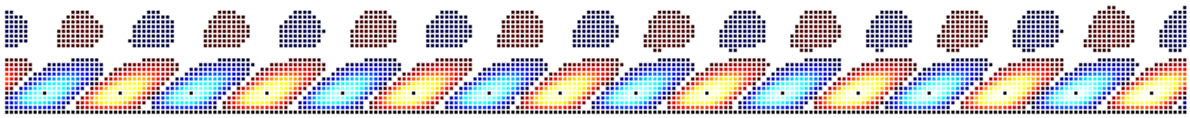


Abb.: 4.4.11. $\alpha^{(1)} = -100$ und $\alpha^{(4)} = -100$

positive kritische Dynamozahl: ra = 5.61

Dargestellter Simulationszeitraum: 0.5925 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 85.05$

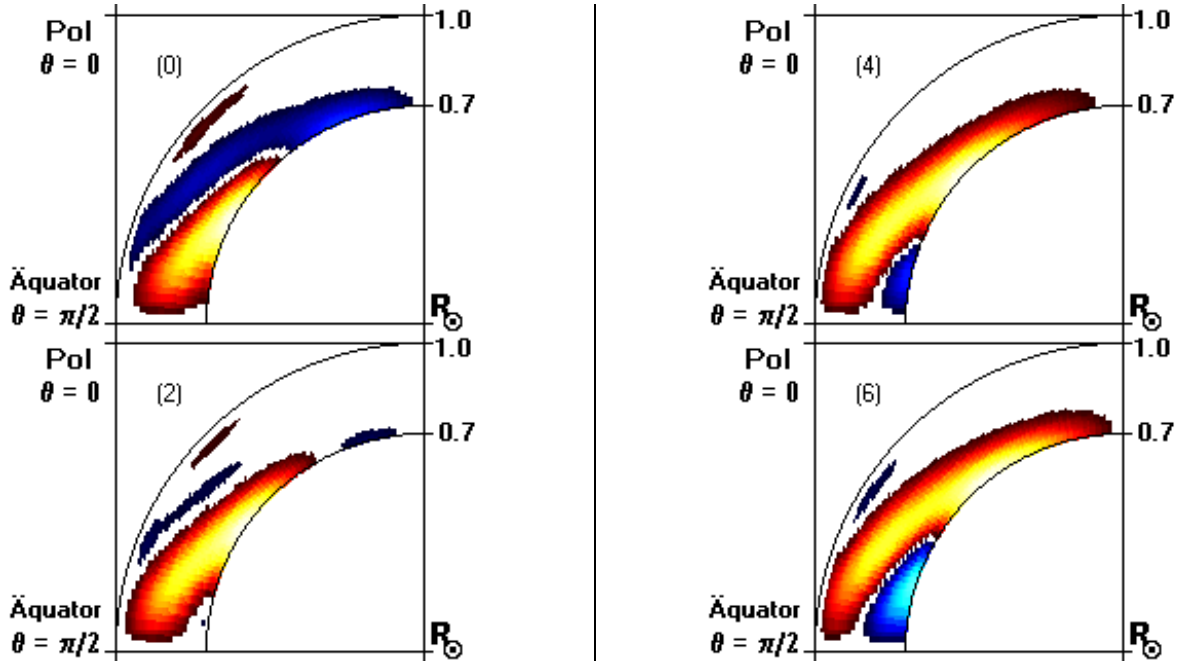


Abb.: 4.4.12. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.4.11. (pmm_9fpl)

Leider blieb hier die Laufrichtung und tiefe Lage des Aktivitätsgürtels nach Zuschalten der differentiellen Rotation und Einschränkung auf die WKZ nicht erhalten. Der Versuch, das vielversprechende Modell von Weißhaar in der WKZ mit differentieller Rotation zu erhalten, endet hiermit.

4.5. Besonderheiten bei anderen Verhältnissen:

Der Abschnitt 4.4 hat gezeigt, dass nur die Kombination von negativem $\alpha^{(1)}$ und positivem $\alpha^{(4)}$ zu einer gewünschten Laufrichtung der Dynamowelle führt, wenn realistische Rotation simuliert wird und die induktiven Effekte auf die WKZ beschränkt sind. Deswegen beschäftigen sich die weiteren Untersuchungen nur noch mit der genannten Kombination.
In den Untersuchungen hat sich gezeigt, was sich in diesem Kapitel bereits abgezeichnet hat. Das Vorzeichen der kritischen Dynamozahl (ra) ist für die qualitative Aussage nicht von wesentlicher Bedeutung. Diese Aussage möchte ich hier für andere Verhältnisse untermauern.
Bei $|\alpha^{(1)}/\alpha^{(4)}| = 8$ habe ich alle möglichen Kombinationen erneut gerechnet und nur mit negativem $\alpha^{(1)}$ und positivem $\alpha^{(4)}$ ergibt sich kein stationäres Feld. Dieser eine bemerkenswerte Fall soll hier im folgenden gezeigt werden.

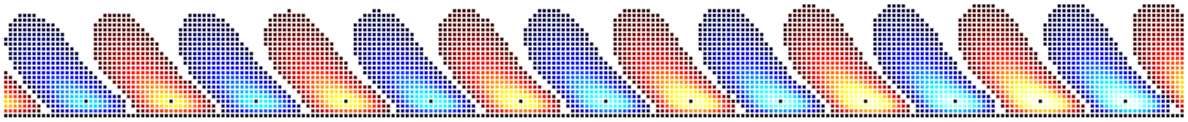


Abb.: 4.5.1. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +50$

negative kritische Dynamozahl:	ra = -10.8
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.4425 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 96.80

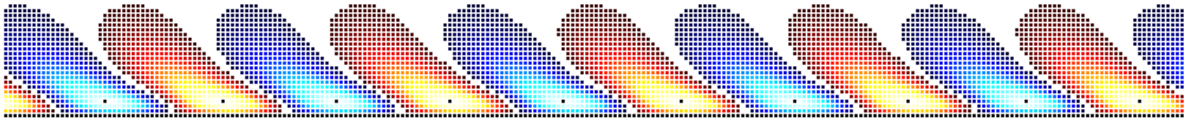


Abb.: 4.5.2. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +50$

positive kritische Dynamozahl:	ra = +10.6
Dargestellter Simulationszeitraum:	0.2925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz:	ω = 110.73

Durch die Veränderung des Verhältnisses wurden die aktiven Regionen stark in die Nähe des Äquators verschoben.
Dieses Bild entspricht schon sehr genau den Beobachtungen. Bei realistischen, physikalischen Größen ist dies eigentlich bereits eine sehr gute Lösung.
Bei diesem hohen Wert für $\alpha^{(4)}$ ist jedoch der Einfluss der differentiellen Rotation nicht sonderlich stark, außerdem wäre es schön die Frequenz noch genauer einstellen zu können.
Die weiter oben genannte Behauptung, der Einfluss des Vorzeichens der kritischen Dynamozahl sei vernachlässigbar, soll im weiteren für verschiedene Größenordnungen untermauert werden.

4.6. Größenverhältnis der anisotropen Anteile zu $\alpha^{(0)}$

Was passiert mit den vorigen Aussagen, wenn ich $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ bei gleichem Verhältnis um eine Größenordnung vermindere und damit den Einfluss der differentiellen Rotation erhöhe?

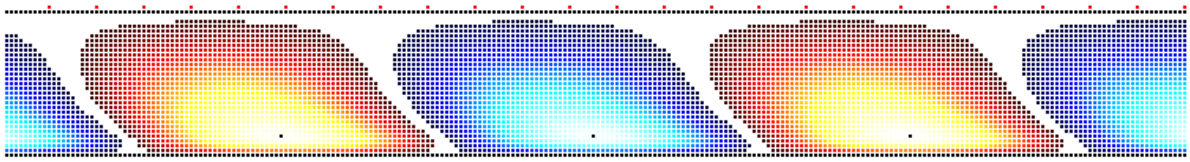


Abb.: 4.6.1. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +5$

negative kritische Dynamozahl: ra = -31

Dargestellter Simulationszeitraum: 0.2175 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 54.30$

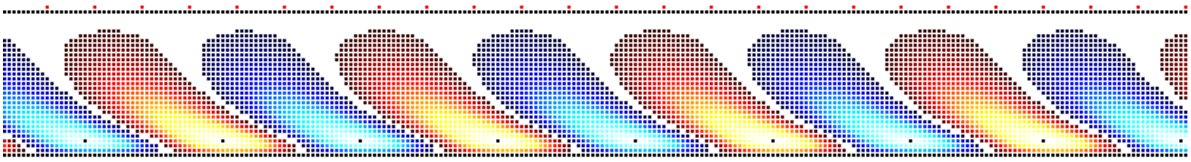


Abb.: 4.6.2. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +5$

positive kritische Dynamozahl: ra = 29.54

Dargestellter Simulationszeitraum: 0.2175 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 124.52$

Bei negativer kritischer Dynamozahl erhalte ich eine deutlich verringerte Frequenz, jedoch Überlappen die Aktivitätszyklen nicht mehr so nahtlos. Die beobachtete Eigenschaft, dass gegen Ende des Zyklus bei ±5° in Breiten von ca. ± 40° ein neuer Zyklus und damit neue Sonnenflecken auftreten, würde hier nur mit einer zeitlichen Unterbrechung eintreten.

Bei Verringerung der anisotropen Anteile um eine weitere Größenordnung endet bei negativer kritischer Dynamozahl die Oszillation.

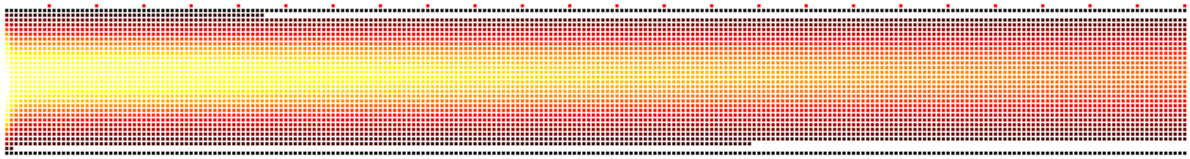


Abb.: 4.6.3. $\alpha^{(1)} = -4.0$ und $\alpha^{(4)} = +0.5$

negative kritische Dynamozahl: ra = -3.08

Dargestellter Simulationszeitraum: 3.5925 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega \approx 0$

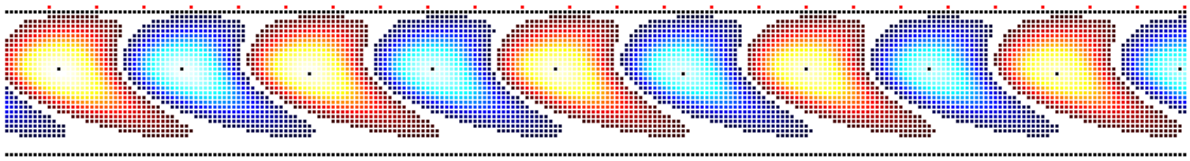


Abb.: 4.6.4. $\alpha^{(1)} = -4.0$ und $\alpha^{(4)} = +0.5$

positive kritische Dynamozahl: ra = 20.03

Dargestellter Simulationszeitraum: 0.2175 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 136.91$

Bei schwacher Anisotropie erhalte ich also wie Prautzsch ein αω-Dynamomodell mit stationärem Verlauf bei negativer kritischer Dynamozahl und für positives ra den für differentielle Rotation typischen nierenförmigen Verlauf statt eines Schmetterlingsflügel. Das Aktivitätsgebiet liegt nicht mehr in der Äquatorregion.

Durch obige Simulation stellt sich die Frage, ob sich im Übergang von Abb.: 4.6.1. zu Abb.: 4.6.3. evtl. die Oszillationsfrequenz direkt durch die Größen von $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ einstellen lässt. Zu diesem Zweck habe ich den Bereich zwischen oszillierendem und statischem Feld näher untersucht.

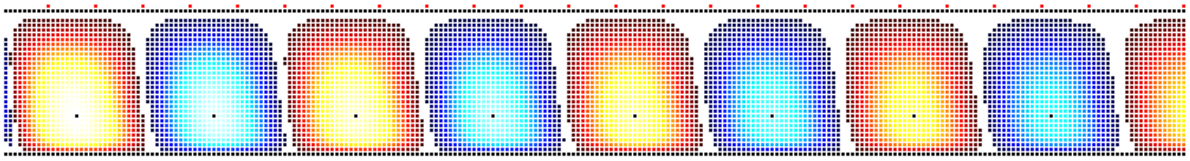


Abb.: 4.6.5. $\alpha^{(1)} = -30$ und $\alpha^{(4)} = +3.75$

negative kritische Dynamozahl: ra = -34.91
Dargestellter Simulationszeitraum: 1.1925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 19.18

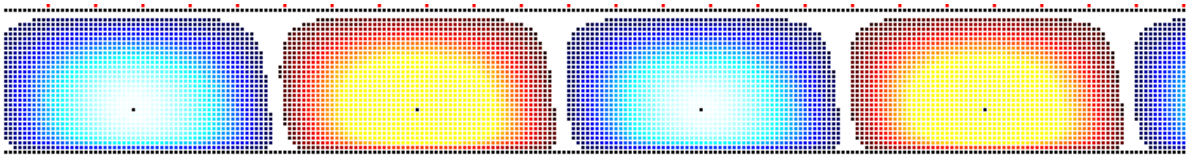


Abb.: 4.6.6. $\alpha^{(1)} = -29$ und $\alpha^{(4)} = +3.625$

negative kritische Dynamozahl: ra = -35.45
Dargestellter Simulationszeitraum: 1.1925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 10.98

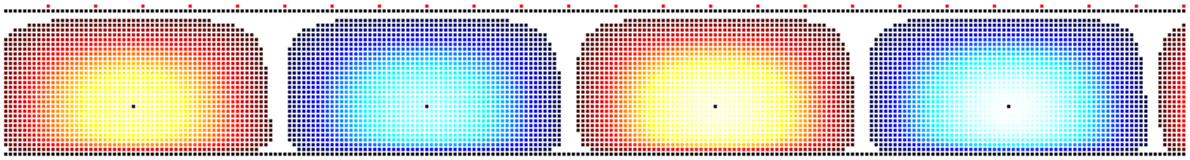


Abb.: 4.6.7. $\alpha^{(1)} = -28.5$ und $\alpha^{(4)} = +?3.59$

negative kritische Dynamozahl: ra = -35.51
Dargestellter Simulationszeitraum: 2.95 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 4.33

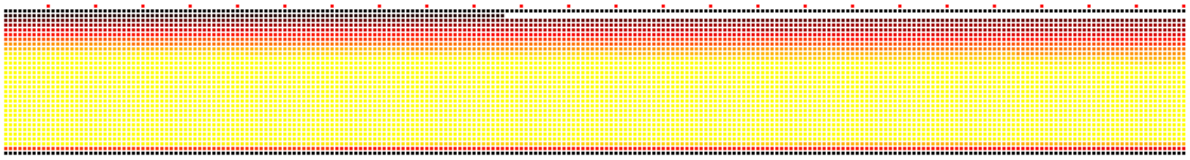


Abb.: 4.6.8. $\alpha^{(1)} = -28$ und $\alpha^{(4)} = +3.56$

negative kritische Dynamozahl: ra = -35.129
Dargestellter Simulationszeitraum: 2.9875 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω ≈ 0

Die Frequenz lässt sich durch die Größenordnung der anisotropen Anteile einstellen, jedoch wird dadurch die Lücke zwischen den Aktivitätszyklen so stark, dass man fast von einem Verlust der äquatorwärts gerichteten Laufrichtung sprechen kann.

Der Verlauf der Zyklen entspricht eher einer Kastenform. Außerdem liegt das Aktivitätsmaximum nicht mehr in Äquatornähe.
Wenn die differentielle Rotation ausreichenden Einfluss in der Gesamtgleichung erfahren soll, ist diese Methode die Frequenz einzustellen also nicht sinnvoll.
Die höheren Größenordnungen stellen dabei eher den Breitengrad des Aktivitätsgebietes ein. Dies soll im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

4.7. Größenverhältnis der anisotropen Anteile untereinander

Die nächsten Bilder sollen zeigen, welchen Einfluss das Verhältnis der anisotropen Anteile untereinander hat? Ausgegangen wird von Abb.: 4.5.1. Für die Anteile soll dabei $|\alpha^{(1)}| < 400$ und $|\alpha^{(4)}| < 400$ gelten.

Für den ersten Fall: $|\alpha^{(1)}| >> |\alpha^{(4)}|$ geht die Oszillationsfrequenz schnell gegen unendlich.

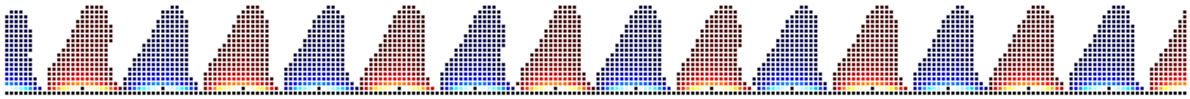


Abb.: 4.7.1. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +10$
negative kritische Dynamozahl: ra = -123
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.05 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 948.63$

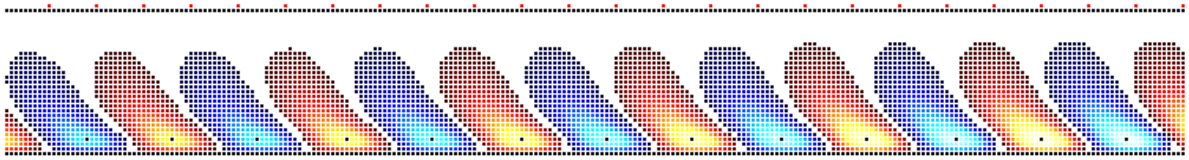


Abb.: 4.7.2. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +50$
negative kritische Dynamozahl: ra = -10.8
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.4425 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 96.80$

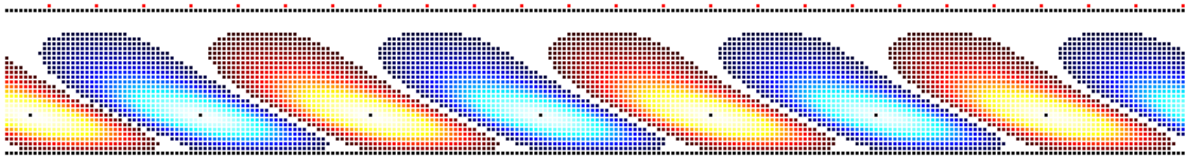


Abb.: 4.7.3. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +100$
negative kritische Dynamozahl: ra = -3.9
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.36 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 59.36$

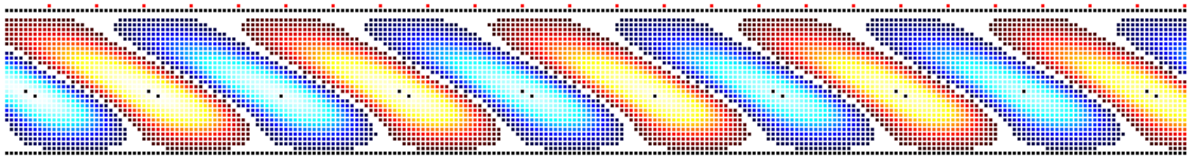


Abb.: 4.7.4. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +200$
negative kritische Dynamozahl: ra = -1.57
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.8925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 33.36$

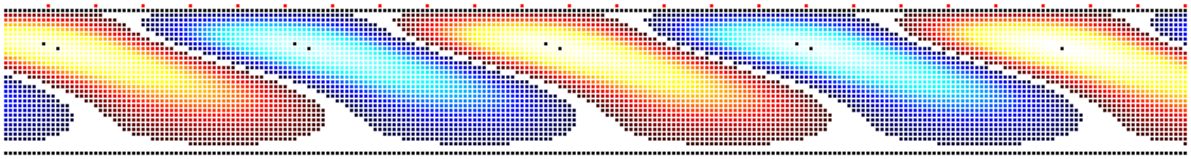


Abb.: 4.7.5. $\alpha^{(1)} = -400$ und $\alpha^{(4)} = +400$
negative Kritische Dynamozahl: ra = -0.81
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.8925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 16.60$

Im obigen Bild ist das Modell von Weißhaar (1982 Fig. 4b) ähnlich wie schon in Abb.: 4.4.4. wiedergegeben.

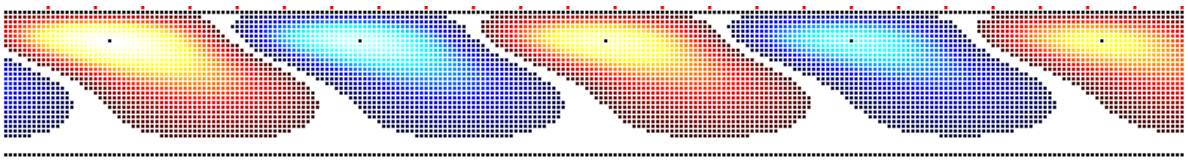


Abb.: 4.7.6. $\alpha^{(1)} = -200$ und $\alpha^{(4)} = +400$
negative kritische Dynamozahl: ra = -0.694
Dargestellter Simulationszeitraum: 1.975 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 7.57$

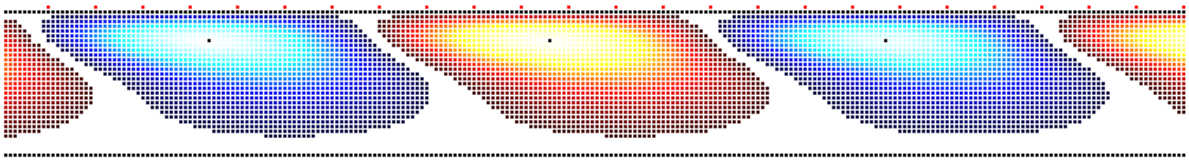


Abb.: 4.7.7. $\alpha^{(1)} = -100$ und $\alpha^{(4)} = +400$
negative kritische Dynamozahl: ra = -0.645
Dargestellter Simulationszeitraum: 2.98 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 3.69$

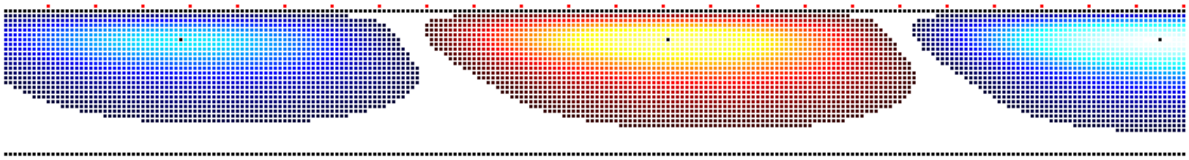


Abb.: 4.7.8. $\alpha^{(1)} = -50$ und $\alpha^{(4)} = +400$
negative kritische Dynamozahl: ra = -0.623
Dargestellter Simulationszeitraum: 5.475 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega = 1.39$

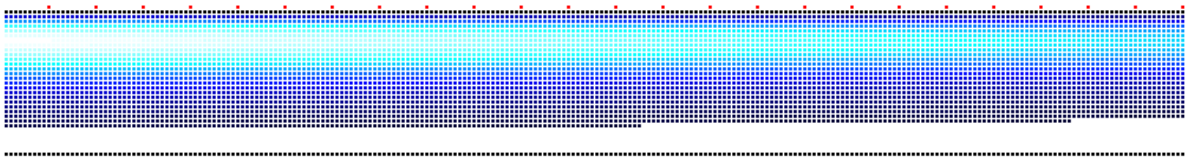


Abb.: 4.7.9. $\alpha^{(1)} = -10$ und $\alpha^{(4)} = +400$
negative kritische Dynamozahl: ra = 0.597
Dargestellter Simulationszeitraum: 5.975 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: $\omega \approx 0$

Gegen Ende ist keine Oszillation mehr zu generieren. Es ist also wirklich wichtig, dass beide anisotropen Anteile $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ gemeinsam eingeschaltet sind, um die Oszillation zu erzeugen. Im obigen Verlauf wird dabei deutlich, dass das Größenverhältnis der beiden untersuchten anisotropen Anteile die Form und die Periode stark beeinflussen.

Für den Wunschfall der Abb.: 4.7.2. ist die Frequenz mit ω~100 noch eine Größenordnung zu groß. Der Meridionalschnitt zeigt die deutliche Konzentration der magnetischen Aktivität in Äquatornähe.

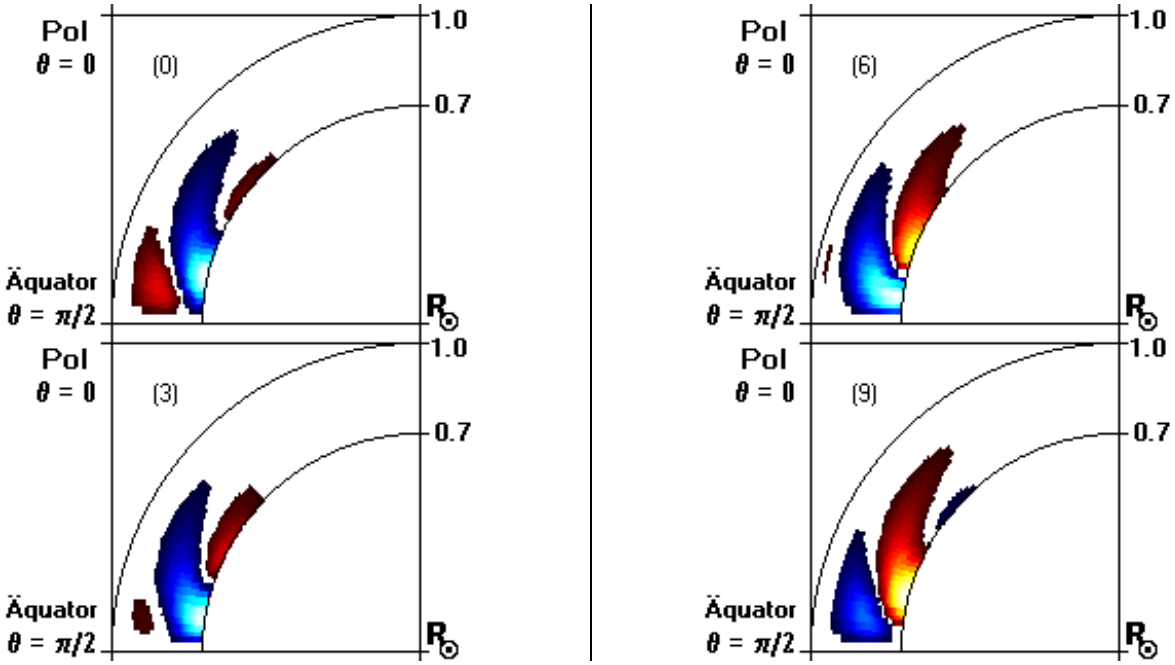


Abb.: 4.7.10. Meridionalschnitt zu Abb.: 4.7.2.
Der dargestellte Zeitraum beträgt 0.028 T_{Diff}. Der zeitlich Verlauf (0-9) zeigt die Entstehung der Magnetfelder in mittleren Breiten. Gleichzeitig das radiale Aufsteigen und eine Wanderung in Richtung Äquator.

Im folgenden möchte ich noch einmal bei den sehr interessanten Bereichen der Abb.: 4.7.2. bis Abb.: 4.7.5. die anisotropen Anteile um eine Größenordnung verringern.

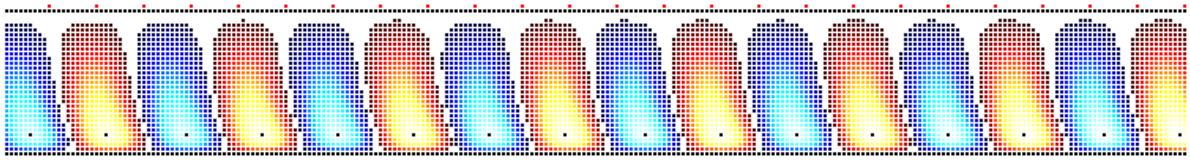


Abb.: 4.7.11. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +5$

negative kritische Dynamozahl: ra = -31.0
Dargestellter Simulationszeitraum: 0.8925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 54.15

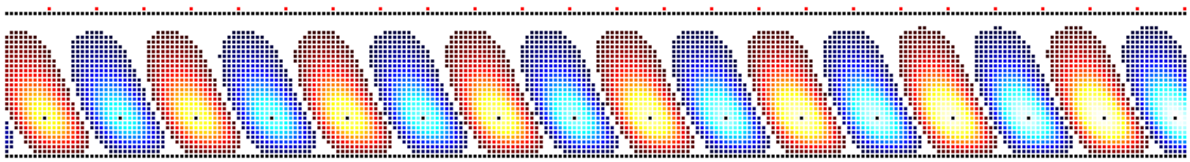


Abb.: 4.7.12. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +10$

negative kritische Dynamozahl: ra = -11.55
Dargestellter Simulationszeitraum: 1.1925 [T_{Diff}]
Oszillationsfrequenz: ω = 41.16

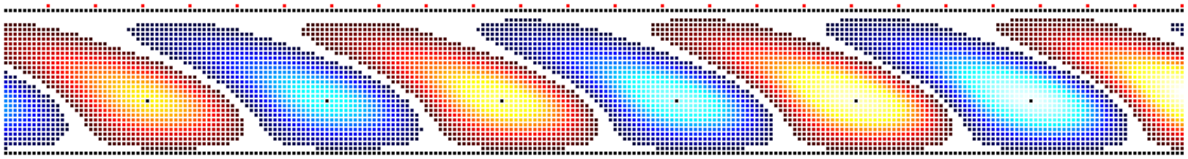


Abb.: 4.7.13. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +20$

negative kritische Dynamozahl: ra = -4.49

Dargestellter Simulationszeitraum: 1.1925 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 17.56$

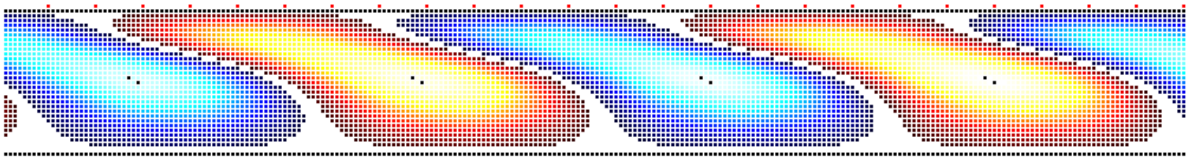


Abb.: 4.7.14. $\alpha^{(1)} = -40$ und $\alpha^{(4)} = +40$

negative kritische Dynamozahl: ra = -2.27

Dargestellter Simulationszeitraum: 1.4925 [T_{Diff}]

Oszillationsfrequenz: $\omega = 8.7$

Mit der Größenordnung von $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ zu $\alpha^{(0)}$ und dem Verhältnis untereinander lässt sich also wirklich die Lage des Aktivitätsgürtels verschieben. Analog zur Verschiebung des Aktivitätsgürtels in höhere Regionen sinkt die Frequenz deutlich ab. Also muss hier anscheinend ein Kompromiss zwischen Frequenz und Lage des Aktivitätsgürtels akzeptiert werden.

5 Diskussion und Ausblick

Ausgegangen wurde von einem Dynamomodell ganzer Sphäre von Weißhaar, bei dem bestimmte Kombinationen der Tensorelemente unter Vernachlässigung der differentiellen Rotation vielversprechende Schmetterlingsdiagramme produzierte (1982 Fig. 3b). Jedoch war die Überlegung, die induktiven Effekte auf der Sonne ganz einem α-Effekt über die ganze Sphäre zuzuschreiben, physikalisch nicht zufriedenstellend. Ein Modell mit differentieller Rotation und Positionierung der Effekte in der WKZ wurde von Prautzsch (1999) gerechnet, dabei wurde auf die anisotropen Tensorelemente verzichtet, was leider auch die Form der Schmetterlingsdiagramme entgegen der Beobachtung veränderte.

In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, die Erkenntnisse und Ergebnisse aus beiden Arbeiten so zu verwenden, dass die guten Ergebnisse beider Arbeiten sich addieren.
Das jetzige Modell berücksichtigt ein realistisches Rotationsgesetz für die differentielle Rotation, wie durch die Helioseismologie beobachtet, und legt dabei die turbulenten Induktionseffekte in die WKZ. Es wird ein $\alpha^2\omega$-Dynamomodell gerechnet. Die Anisotropie des α-Tensors wird zunächst von Weißhaar übernommen. Die turbulente Diffusion wird über den ganzen Simulationsbereich konstant gesetzt.

In verschiedenen Untersuchungen wurde einmal vom Weißhaar-Modell ausgehend schrittweise ein realistisches Rotationsgesetz in das Modell eingebracht. Auf einem anderen Weg wurde schrittweise die Schalendicke verringert bzw. der untere Rand angehoben, so dass die induktiven Effekte bis hin zur WKZ beschränkt wurden.
Im Laufe der einzelnen Schritte stellte sich heraus, dass weder mit Schale noch mit differentieller Rotation im eingeschlagenen Weg ein gewünschter Magnetfeldzyklus simuliert werden konnte und schon gar nicht mit beiden Bedingungen. In beiden Wegen führte die Kombination zu polwärts laufenden Dynamowellen. Die verschiedenen Wege machten deutlich, dass der Einfluss der Schalendicke erheblich stärker war als der der differentiellen Rotation, die im Verhältnis zu den anisotropen Anteilen schwach war.

Andere Werte für die anisotropen Anteile des Tensors wurden untersucht. Größenordnungen, Größenverhältnisse und Vorzeichen wurden auf ihren Einfluss hin begutachtet und ausgewertet.

So wurde ein Modell gefunden, das von den Vorzeichen der anisotropen Anteile her einem zunächst weniger beachteten Modell von Weißhaar (1982 Fig. 4a) glich. Das Modell wurde zuerst ausser Acht gelassen, da der Aktivitätsgürtel in zu hohen Breiten lag. Dieses Modell besaß jedoch bereits die gewünschte Laufrichtung. Die Kombination der anisotropen Anteile in verschiedenen Verhältnissen und Größenordnungen hatte große Auswirkungen. So wurden erneut Ergebnisse gefunden, die in ihrer Form dem beobachteten Schmetterlingsdiagramm nahekamen.

Die Simulationen zeigten allerdings, dass die so gefundenen anisotropen Anteile die differentielle Rotation in ihrer Wirkung bei weitem übertrafen. Bei geringeren Größenordnungen für $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ im Verhältnis zu $\alpha^{(0)}$ wird der Einfluss der differentiellen Rotation spürbar und dann eher störend.

Bei dominanter differentieller Rotation beginnt das Vorzeichen der kritischen Dynamozahl eine bedeutende Rolle zu spielen. So kann zum Beispiel das Vorzeichen der kritischen Dynamozahl den Unterschied zwischen Oszillation und stationärem Dynamomodell ausmachen, wenn gilt $R_\Omega/R_\alpha > 30$. Bei Oszillation stellt sich mit starkem Einfluss der differentiellen Rotation, die schon bei Prautzsch (1999) erkannte typische Nierenform des Schmetterlingsdiagrammes dar.

Der anisotrope Tensor war jedoch der richtige Weg und so kann jetzt mit Abb.: 4.5.2. ein zufriedenstellendes Dynamomodell vorgezeigt werden. Bei dem allerdings die Frequenz der Oszillation mit $\omega \sim 100$ noch deutlich zu hoch liegt.

Erst das gemeinsame Wirken der anisotropen Anteile $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(4)}$ konnte Oszillation und den gewünschten Lauf der Dynamowelle erzeugen. Die Größenordnung und das Verhältnis von $\alpha^{(1)}$ zu $\alpha^{(4)}$ untereinander sind die wichtigen Größen in der vorliegenden Arbeit. Mit ihnen kann in begrenztem Maße die Oszillationsfrequenz, die Lage des Aktivitätsgürtels und die Neigung der Laufrichtung eingestellt werden.

A Die numerische Herleitung der α-Terme

Im folgenden soll der im Kapitel 3.5. übersprungene Weg zur Numerik im einzelnen aufgeführt werden.
Hier werden die Ableitungen unter Anwendung der expliziten Dreipunktgleichung für ein bekanntes Feld benutzt.

Zum Beispiel sieht das wie folgt aus: $\frac{\partial a}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{a_{i,j+1} - a_{i,j-1}}{2dth} \Rightarrow \frac{a(i,jp1) - a(i,jm1)}{2dth}$

Folgende Symbolik wird benutzt:

$r \hat{=} i$	Zählt den einzelnen Schritt in die r-Richtung $im1 \hat{=} i-1$ und $ip1 \hat{=} i+1$
$\theta \hat{=} j$	Zählt den einzelnen Schritt in die θ-Richtungen $jm1 \hat{=} j-1$ und $jp1 \hat{=} j+1$
$dth \hat{=} \lvert\theta_j - \theta_{j+1}\rvert$	Abstand zwischen zwei Schritten in θ-Richtung
$\alpha_{r\varphi} \hat{=} alprf_{i,j}$	hier werden die Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) mit r,t,f abgekürzt!

Folgende Substitutionen wurden durchgeführt:

a = **A** r sin (θ)
b = **B** r sin (θ)

Der poloidale Anteil der Induktionsgleichung:

$$\left(\vec{\bar{\alpha}}\vec{\mathbf{B}}\right)_{tor} = \frac{\alpha_0 \mathbf{R}}{\eta_0}\left[\frac{\hat{\alpha}_{\varphi r}}{\mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} - \hat{\alpha}_{\varphi\theta}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} + \hat{\alpha}_{\varphi\varphi}\mathbf{b}\right]$$

Nur der rechte Teil der Gleichung wird nun weiter betrachtet.

<u>Numerische Zerlegung, Schritt 1:</u> Anwenden der Dreipunktformel

$$ralp\left[\frac{alpfr_{i,j}}{r_i}\frac{a_{i,jp1} - a_{i,jm1}}{2dth} - alpft_{i,j}\frac{a_{ip1,j} - a_{im1,j}}{2dr} + alpffb_{i,j}\right]$$

Auf Grund der numerischen Auflösung der Zeitableitungen $\frac{a_{i,j}^{\,n+\frac{1}{2}} - a_{i,j}^{\,n}}{\frac{1}{2}\cdot dt}$ bzw. $\frac{b_{i,j}^{\,n+\frac{1}{2}} - b_{i,j}^{\,n}}{\frac{1}{2}\cdot dt}$,

müssen die Gleichungen noch mit $\frac{1}{2}\cdot dt$ multipliziert werden.
Der Term $+a_{i,j}$ bzw. $+b_{i,j}$ wird an anderer Stelle in die Gleichung hinzugefügt! Außerdem soll die Gleichung durch geschicktes Ausklammern für die Substitution von Koeffizientenfeldern vorbereitet werden.

<u>Numerische Zerlegung, Schritt 2:</u> Auflösen der Klammern und Multiplikation mit $\frac{1}{2}\cdot dt$

$$\frac{dt\cdot ralp\cdot alpfr_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}a_{i,jp1} - \frac{dt\cdot ralp\cdot alpfr_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}a_{i,jm1} - \frac{dt\cdot ralp\cdot alpft_{i,j}}{4dr}a_{ip1,j} + \frac{dt\cdot ralp\cdot alpft_{i,j}}{4dr}a_{im1,j} + \frac{1}{2}dt\cdot ralp\cdot alpff\cdot b_{i,j}$$

Der toroidale Anteil der Induktionsgleichung, folgt analog:

$$\mathrm{rot}\left[\left(\vec{\vec{\alpha}}\vec{B}\right)_{pol}\right]=\frac{\alpha_0 R}{\eta_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\alpha}_{\theta r}}{\partial r}\frac{\partial a}{\partial\theta}-\frac{\hat{\alpha}_{\theta r}}{r^2}\frac{\partial a}{\partial\theta}+\frac{\hat{\alpha}_{\theta r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial a}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\hat{\alpha}_{\theta\theta}}{\partial r}\frac{\partial a}{\partial r}-\hat{\alpha}_{\theta\theta}\frac{\partial^2 a}{\partial^2 r}+\frac{\partial\hat{\alpha}_{\theta\varphi}}{\partial r}b+\hat{\alpha}_{\theta\varphi}\frac{\partial b}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\hat{\alpha}_{rr}}{\partial\theta}\frac{\partial a}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.+\hat{\alpha}_{rr}\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial a}{\partial\theta}-\frac{\hat{\alpha}_{rr}}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial^2\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\alpha}_{r\theta}}{\partial\theta}\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{\hat{\alpha}_{r\theta}\cot\theta}{r}\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\hat{\alpha}_{r\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\alpha}_{r\varphi}}{\partial\theta}b+\frac{\hat{\alpha}_{r\varphi}\cot\theta}{r}b-\frac{\hat{\alpha}_{r\varphi}}{r}\frac{\partial b}{\partial\theta}\right]$$

Numerische Zerlegung, Schritt 1: Anwenden der Dreipunktformel

$$\mathrm{ralp}\left[\frac{1}{r_i}\frac{\mathrm{alptr}_{ip1,j}-\mathrm{alptr}_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{i,jp1}-a_{i,jm1}}{2dth}-\frac{\mathrm{alptr}_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}-a_{i,jm1}}{2dth}+\frac{\mathrm{alptr}_{i,j}}{r_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_{i,jp1}-a_{i,jm1}}{2dth}\right)\right.$$
$$-\frac{\mathrm{alptt}_{ip1,j}-\mathrm{alptt}_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{ip1,j}-a_{im1,j}}{2dr}-\mathrm{alptt}_{i,j}\frac{a_{ip1,j}-2a_{i,j}+a_{im1,j}}{dr^2}+\frac{\mathrm{alptf}_{ip1,j}-\mathrm{alptf}_{im1,j}}{2dr}b_{i,j}$$
$$+\mathrm{alptf}_{i,j}\frac{b_{ip1,j}-b_{im1,j}}{2dr}-\frac{1}{r_i^2}\frac{\mathrm{alprr}_{i,jp1}-\mathrm{alprr}_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{i,jp1}-a_{i,jm1}}{2dth}+\frac{\mathrm{alprr}_{i,j}\cot th_j}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}-a_{i,jm1}}{2dth}$$
$$-\frac{\mathrm{alprr}_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}-2a_{i,j}+a_{i,jm1}}{dth^2}+\frac{1}{r_i}\frac{\mathrm{alprt}_{i,jp1}-\mathrm{alprt}_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{ip1,j}-a_{im1,j}}{2dr}-\frac{\mathrm{alprt}_{i,j}\cot th_j}{r_i}\frac{a_{ip1,j}-a_{im1,j}}{2dr}$$
$$\left.+\frac{\mathrm{alprt}_{i,j}}{r_i}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a_{ip1,j}-a_{im1,j}}{2dr}\right)-\frac{1}{r_i}\frac{\mathrm{alprf}_{i,jp1}-\mathrm{alprf}_{i,jm1}}{2dth}b_{i,j}+\frac{\mathrm{alprf}_{i,j}\cot th_j}{r_i}b_{i,j}-\frac{\mathrm{alprf}_{i,j}}{r_i}\frac{b_{i,jp1}-b_{i,jm1}}{2dth}\right]$$

Numerische Zerlegung, Schritt 2: Auflösen der Brüche zu einzelnen Termen

$$\mathrm{ralp}\left[\frac{1}{r_i}\left(\frac{\mathrm{alptr}_{ip1,j}}{2dr}-\frac{\mathrm{alptr}_{im1,j}}{2dr}\right)\left(\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{a_{i,jm1}}{2dth}\right)-\frac{\mathrm{alptr}_{i,j}}{r_i^2}\left(\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{a_{i,jm1}}{2dth}\right)+\frac{\mathrm{alptr}_{i,j}}{r_i}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_{i,jp1}}{2dth}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_{i,jm1}}{2dth}\right)\right]\right.$$
$$-\left(\frac{\mathrm{alptt}_{ip1,j}}{2dr}-\frac{\mathrm{alptt}_{im1,j}}{2dr}\right)\left(\frac{a_{ip1,j}}{2dr}-\frac{a_{im1,j}}{2dr}\right)-\mathrm{alptt}_{i,j}\left(\frac{a_{ip1,j}}{dr^2}-\frac{2a_{i,j}}{dr^2}+\frac{a_{im1,j}}{dr^2}\right)+\left(\frac{\mathrm{alptf}_{ip1,j}}{2dr}-\frac{\mathrm{alptf}_{im1,j}}{2dr}\right)b_{i,j}$$
$$+\mathrm{alptf}_{i,j}\left(\frac{b_{ip1,j}}{2dr}-\frac{b_{im1,j}}{2dr}\right)-\frac{1}{r_i^2}\left(\frac{\mathrm{alprr}_{i,jp1}}{2dth}-\frac{\mathrm{alprr}_{i,jm1}}{2dth}\right)\left(\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{a_{i,jm1}}{2dth}\right)+\frac{\mathrm{alprr}_{i,j}\cot th_j}{r_i^2}\left(\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{a_{i,jm1}}{2dth}\right)$$
$$-\frac{\mathrm{alprr}_{i,j}}{r_i^2}\left(\frac{a_{i,jp1}}{dth^2}-\frac{2a_{i,j}}{dth^2}+\frac{a_{i,jm1}}{dth^2}\right)+\frac{1}{r_i}\left(\frac{\mathrm{alprt}_{i,jp1}}{2dth}-\frac{\mathrm{alprt}_{i,jm1}}{2dth}\right)\left(\frac{a_{ip1,j}}{2dr}-\frac{a_{im1,j}}{2dr}\right)$$
$$-\frac{\mathrm{alprt}_{i,j}\cot th_j}{r_i}\left(\frac{a_{ip1,j}}{2dr}-\frac{a_{im1,j}}{2dr}\right)+\frac{\mathrm{alprt}_{i,j}}{r_i}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a_{ip1,j}}{2dr}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a_{im1,j}}{2dr}\right)\right]-\frac{1}{r_i}\left(\frac{\mathrm{alprf}_{i,jp1}}{2dth}-\frac{\mathrm{alprf}_{i,jm1}}{2dth}\right)b_{i,j}$$
$$\left.+\frac{\mathrm{alprf}_{i,j}\cot th_j}{r_i}b_{i,j}-\frac{\mathrm{alprf}_{i,j}}{r_i}\left(\frac{b_{i,jp1}}{2dth}-\frac{b_{i,jm1}}{2dth}\right)\right]$$

Numerische Zerlegung, Schritt 3: Ausmultiplizieren

$$\frac{ralp}{r_i}\frac{alptr_{ip1,j}}{2dr}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{ralp}{r_i}\frac{alptr_{ip1,j}}{2dr}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}-\frac{ralp}{r_i}\frac{alptr_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}+\frac{ralp}{r_i}\frac{alptr_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}$$
$$-\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}+\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}$$
$$+\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i}\frac{a_{ip1,jp1}}{4drdth}-\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i}\frac{a_{im1,jp1}}{4drdth}-\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i}\frac{a_{ip1,jm1}}{4drdth}+\frac{ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i}\frac{a_{im1,jm1}}{4drdth}$$
$$-\frac{ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{2dr}\frac{a_{ip1,j}}{2dr}+\frac{ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{2dr}\frac{a_{im1,j}}{2dr}+\frac{ralp\cdot alptt_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{ip1,j}}{2dr}-\frac{ralp\cdot alptt_{im1,j}}{2dr}\frac{a_{im1,j}}{2dr}$$
$$-\frac{ralp\cdot alptt_{i,j}\cdot a_{ip1,j}}{dr^2}+\frac{2ralp\cdot alptt_{i,j}\cdot a_{i,j}}{dr^2}-\frac{ralp\cdot alptt_{i,j}\cdot a_{im1,j}}{dr^2}$$
$$+\frac{ralp\cdot b_{i,j}\cdot alptf_{ip1,j}}{2dr}-\frac{ralp\cdot b_{i,j}\cdot alptf_{im1,j}}{2dr}$$
$$+\frac{ralp\cdot alptf_{i,j}\cdot b_{ip1,j}}{2dr}-\frac{ralp\cdot alptf_{i,j}\cdot b_{im1,j}}{2dr}$$
$$-\frac{ralp}{r_i^2}\frac{alprr_{i,jp1}}{2dth}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}+\frac{ralp}{r_i^2}\frac{alprr_{i,jp1}}{2dth}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}+\frac{ralp}{r_i^2}\frac{alprr_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{ralp}{r_i^2}\frac{alprr_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}$$
$$+\frac{ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}}{2dth}-\frac{ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i^2}\frac{a_{i,jm1}}{2dth}$$
$$-\frac{ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jp1}}{dth^2}+\frac{ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2}\frac{2a_{i,j}}{dth^2}-\frac{ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2}\frac{a_{i,jm1}}{dth^2}$$
$$+\frac{ralp}{r_i}\frac{alprt_{i,jp1}}{2dth}\frac{a_{ip1,j}}{2dr}-\frac{ralp}{r_i}\frac{alprt_{i,jp1}}{2dth}\frac{a_{im1,j}}{2dr}-\frac{ralp}{r_i}\frac{alprt_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{ip1,j}}{2dr}+\frac{ralp}{r_i}\frac{alprt_{i,jm1}}{2dth}\frac{a_{im1,j}}{2dr}$$
$$-\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i}\frac{a_{ip1,j}}{2dr}+\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i}\frac{a_{im1,j}}{2dr}$$
$$+\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i}\frac{a_{ip1,jp1}}{4dthdr}-\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i}\frac{a_{ip1,jm1}}{4dthdr}-\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i}\frac{a_{im1,jp1}}{4dthdr}+\frac{ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i}\frac{a_{im1,jm1}}{4dthdr}$$
$$-\frac{ralp\cdot b_{i,j}}{r_i}\frac{alprf_{i,jp1}}{2dth}+\frac{ralp\cdot b_{i,j}}{r_i}\frac{alprf_{i,jm1}}{2dth}$$
$$+\frac{ralp\cdot alprf_{i,j}\cdot\cot th_j\cdot b_{i,j}}{r_i}$$
$$-\frac{ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i}\frac{b_{i,jp1}}{2dth}+\frac{ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i}\frac{b_{i,jm1}}{2dth}$$

Numerische Zerlegung, Schritt 4: Multiplikation mit $\frac{1}{2}\cdot dt$

$$\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{ip1,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{i,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{ip1,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{i,jm1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{im1,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{i,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{im1,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{i,jm1}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2\cdot 4dth}a_{i,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2\cdot 4dth}a_{i,jm1}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{ip1,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{im1,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{ip1,jm1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}a_{im1,jm1}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{8dr^2}a_{ip1,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{8dr^2}a_{im1,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{im1,j}}{8dr^2}a_{ip1,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{im1,j}}{8dr^2}a_{im1,j}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{2dr^2}a_{ip1,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{dr^2}a_{i,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{2dr^2}a_{im1,j}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{ip1,j}}{4dr}b_{i,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{im1,j}}{4dr}b_{i,j}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{i,j}}{4dr}b_{ip1,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{i,j}}{4dr}b_{im1,j}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jp1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}a_{i,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jp1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}a_{i,jm1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jm1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}a_{i,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jm1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}a_{i,jm1}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot \cot th_j}{r_i^2\cdot 4dth}a_{i,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot \cot th_j}{r_i^2\cdot 4dth}a_{i,jm1}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot 2dth^2}a_{i,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot dth^2}a_{i,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot 2dth^2}a_{i,jm1}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jp1}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{ip1,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jp1}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{im1,j}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jm1}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{ip1,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jm1}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{im1,j}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot \cot th_j}{r_i\cdot 4dr}a_{ip1,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot \cot th_j}{r_i\cdot 4dr}a_{im1,j}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{ip1,jp1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{ip1,jm1}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}a_{im1,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r\cdot 8dthdr_i}a_{im1,jm1}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,jp1}}{r_i\cdot 4dth}b_{i,j}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,jm1}}{r_i\cdot 4dth}b_{i,j}$$
$$+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}\cdot \cot th_j}{2r_i}b_{i,j}$$
$$-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}b_{i,jp1}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}b_{i,jm1}$$

Numerische Zerlegung, Schritt 5: Ausklammern der konstanten Koeffizientenfelder

$$
\begin{aligned}
&a_{i,j}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{dr^2}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot dth^2}\right)\\
&+a_{im1,j}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{8dr^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{im1,j}}{8dr^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{2dr^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jp1}}{r_i\cdot 8dthdr}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jm1}}{r_i\cdot 8dthdr}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i\cdot 4dr}\right)\\
&+a_{ip1,j}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{im1,j}}{8dr^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{ip1,j}}{8dr^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptt_{i,j}}{2dr^2}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jp1}}{r_i\cdot 8dthdr}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,jm1}}{r_i\cdot 8dthdr}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i\cdot 4dr}\right)\\
&+a_{i,jm1}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{im1,j}}{r_i\cdot 8drdth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{ip1,j}}{r_i\cdot 8drdth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2\cdot 4dth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jp1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jm1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i^2\cdot 4dth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot 2dth^2}\right)\\
&+a_{i,jp1}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{ip1,j}}{r_i\cdot 8drdth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{im1,j}}{r_i\cdot 8drdth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i^2\cdot 4dth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jp1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,jm1}}{r_i^2\cdot 8dth^2}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}\cdot\cot th_j}{r_i^2\cdot 4dth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprr_{i,j}}{r_i^2\cdot 2dth^2}\right)\\
&+a_{im1,jm1}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r\cdot 8dthdr_i}\right)\\
&+a_{im1,jp1}\cdot\left(-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}\right)\\
&+a_{ip1,jm1}\cdot\left(-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}\right)\\
&+a_{ip1,jp1}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptr_{i,j}}{r_i\cdot 8drdth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprt_{i,j}}{r_i\cdot 8dthdr}\right)\\
&+b_{i,j}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{ip1,j}}{4dr}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{im1,j}}{4dr}-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,jp1}}{r_i\cdot 4dth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,jm1}}{r_i\cdot 4dth}+\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}\cdot\cot th_j}{2r_i}\right)\\
&+b_{im1,j}\cdot\left(-\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{i,j}}{4dr}\right)\\
&+b_{ip1,j}\cdot\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alptf_{i,j}}{4dr}\right)\\
&+b_{i,jm1}\left(\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}\right)\\
&+b_{i,jp1}\left(-\frac{dt\cdot ralp\cdot alprf_{i,j}}{r_i\cdot 4dth}\right)
\end{aligned}
$$

So ergibt sich die endgültige Zerlegung in einfache Terme für die Simulation.

Literaturverzeichnis

BABCOCK H.W., 1953, , Astrophys. J. **118**, S. 387
BABCOCK H.W., 1961, , Astrophys. J. **133**, S. 572
CARRINGTON R.C., 1863, Observations of the Spots on the Sun, Williams & Norgate London
COWLING T.G., 1934, , Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **94**, S. 39
ELSASSER W., 1947, , Phys. Rev. **72**, S. 821
HALE G. E., 1908, , Astrophys J. **28**, S. 315
KIPPENHAHN R., 1990, Der Stern, von dem wir leben, Deutsche V.-A., Stgt.
KIPPENHAHN R., MÖLLENHOFF C.**,** 1975**,** Elementare Plasmaphysik**,** BI Mannheim
KRAUSE F., 1967, Habilitationsschrift, Univ. Jena
KRAUSE F. RÄDLER K.-H., 1980, Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory, Oxford : Pergamon Press
LIBBRECHT K.G., 1988, Seismology of the Sun and Sun-Like Stars (ed. E.J. Rolfe), ESA **SP-286,** S. 131
LORTZ D., 1968, , Phys. Fluids **11**, S. 913
MAUNDER, E.W., 1894, , Knowledge 17, S. 173
MITCHELL W.M., 1916, The history of the discovery of the solar spots, Popular Astronomy **24**, S. 22ff.
NICOLSON I., 1982, Die Sonne, Herder, Freiburg
PARKER E.N., 1955, , Astrophys. J. **122**, S. 293
PARKER E.N., 1970, , Astrophys. J. **162**, S. 666
PRAUTZSCH T., 1990, Der Einfluss von breitenabhängigen Induktionseffekten auf einen eindimensionalen, sphärischen $\alpha\omega$-Dynamo, Diplomarbeit an der Univ. Göttingen
PRAUTZSCH T., 1999, Zum Entstehungsort solarer Magnetfelder, Dissertation an der Univ. Göttingen, Duehrkohp & Radicke
PRIEST E.R., 1982, Solar Magnetohydrodynamics, Reidel Dordrecht, S. 99ff
SCHÜSSLER M., 1983, Solar Magnetic Fields: Origins and Coronal Effect, Reidel, Dordrecht, IAU-Symp. **No. 102**, S. 213
SCHWABE H., 1844, , Astron. Nachrichten **21**, S. 233
SPÖRER G.E., 1887, , Viertelj. Astron. Ges. **22**, S. 323
STIX M., 1991, The Sun, Springer-Verlag, S. 150-193
WEISSHAAR E., 1978, Ein tensorieller α^2-Dynamo, Diplomarbeit an der Univ. Göttingen
WEISSHAAR E., 1982, A numerical Study of α-Dynamos with Anisotropic α-Effect, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **21**, S. 285-301
WOLF R., 1861, , Astron. Mitt. Zürich , S. 12

Verzeichnis der Internetadressen (URL)

URL 1: Sunspots History, NOEL WANNER, 5. 11. 1999, http://www.exploratorium.edu/sunspots/
URL 2: Latest MDI pseudo-continuum image, 5. 11 1999, http://www.lmsal.com/YPOP/ProjectionRoom/latest_MDI_CON.html
URL 3: The Sunspot Cycle, DAVID H. HATHAWAY, NASA/Marschall Space Flight Center, 11.02.1999, http://wwwssl.msfc.nasa.gov/ssl/pad/solar/sunspots.html

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Dr. Tilmann Prautzsch bedanken. Seine unermüdliche Geduld und allgegenwärtige Bereitschaft mir mit immer neuen Ratschlägen unter die Arme zu greifen, waren die nötige Unterstützung, die mich durch schwere Zeiten gebracht hat.

Mein besonderer Dank gilt auch meinen Eltern und meinen FreundInnen, die mir halfen, im Studium den Kontakt zum Wesentlichen nicht zu verlieren. Ich danke Karin Schnepel für die vielen sonnigen Tage in der teilweise düsteren Zeit während meiner Diplomarbeit.

Für die Betreuung der Arbeit und Stellung des Themas möchte ich Herrn Priv. Doz. Dr. D. Schmitt danken sowie der gesamten Abteilung der theoretischen Sonnenphysik, die immer ein offenes Ohr für eine kleine Diskussion hatten.

Abschließend möchte ich die hervorragende Atmosphäre in der Gauss-Sternwarte ausdrücklich erwähnen.